Teoria dei Giochi

Anna Torre

Almo Collegio Borromeo 26 marzo 2015

email: anna.torre@unipv.it

sito web del corso:www-dimat.unipv.it/atorre/borromeo2015.html

COOPERAZIONE

Esempio: strategie correlate e problema della contrattazione affrontato da Nash. Per realizzare la cooperazione deve essere possibile stipulare accordi e deve esserci la possibilità di far rispettare tali accordi deve esserci una

autorità accettata da tutti i componenti.

Giochi coooerativi ad utilità trasferibile, giochi (cooperativi) a pagamenti laterali o TU-games

- N é un insieme di giocatori;
- C 'é una scala comune di misura per le funzioni di utilità;
- Le possibili coalizioni si possono procurare una certa utilità e in seguito spartirsela all'interno come preferiscono.

- N = $\{1, ..., n\}$
- $P(N)$ é l'insieme dei sottoinsiemi di N: I sottoinsiemi S di N ($S \subseteq N$) vengono detti **coalizioni**.
- $v : P(N) \longrightarrow R$ una applicazione tale che $v(\emptyset) = 0$.

Gioco a pagamenti laterali: La coppia (N, v) si dice "gioco a pagamenti laterali". Interpretazione:

- N è l'insieme dei giocatori;
- Ogni gruppo di giocatori $S \subseteq N$ è in grado di garantirsi una somma di denaro $v(S)$;
- Se $S = \emptyset$ (cioè non contiene elementi) $v(S)$ é uguale a zero.

Esempio: Gioco di maggioranza

- $N = \{1, 2, 3\}$,
- $v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$,
- $v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = v(\{1, 2, 3\}) = 1$.

Interpretazione: Per far passare una decisione è necessaria la maggioranza di N.
Se sono tre individui possono mettersi d'accordo in due e presumibilmente si divideranno l'utile, oppure mettersi d'accordo tutti e tre.

Gioco dei guanti

- Abbiamo un insieme N di giocatori, che è partizionato in due sottoinsiemi L (i giocatori che possiedono esattamente un guanto sinistro ciascuno) ed R (i giocatori che possiedono esattamente un guanto destro ciascuno).
- $N = L \cup R$ e $L \cap R = \emptyset$.
- Data una coalizione S, $v(S)$ è uguale al numero di paia di guanti che gli elementi d iS riescono a formare.

Esempio: se in S ci sono 3 elementi di L e 5 elementi di R, si ha $v(S) = 3$, perchè riescono a formare 3 paia di guanti (e ne avanzano due destri).

Giochi superadditivi

Una importante classe di giochi a pagamenti laterali è costituita dai giochi superadditivi.
Sia $G = (N, v)$ un gioco a pagamenti laterali. G si dice superadditivo se:
$\forall S, T \subseteq N \ t.c. \ S \cap T = \emptyset : \ v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$

- La definizione traduce l'idea che "l'unione fa la forza". (In tale classe rientrano entrambi i giochi degli esempi precedenti).
- Non è scontata in ogni situazione: può succedere che S e T siano coalizioni portatrici di interessi tra loro conflittuali e che quindi la coalizione $S \cup T$ venga "penalizzata" da contrasti interni o che comunque abbia dei risultati inferiori a quelli che S e T potrebbero avere separatamente.

Giochi coesivi

Sia $G = (N, v)$ un gioco a pagamenti laterali. G si dice coesivo se: $\forall \{S_1, S_2, ..., S_k\}$, partizione di N, si ha $v(N) \geq \Sigma_{i=1}^{k} v(S_i)$

Se un gioco è superadditivo, allora è coesivo.

Soluzioni

- La condizione di essere coesivo è meno restrittiva della superadditività. Se un gioco è coesivo è conveniente per i giocatori formare la "grande coalizione" N, ma non è detto che coalizzarsi sia sempre conveniente.
- Il problema fondamentale, dato un gioco a pagamenti laterali, è come "spartire i guadagni" tra i giocatori, oppure come spartire i costi per un gioco dei costi.
- Non c'è una regola "incontestabile".La teoria non dice quale "deve essere" la soluzione, bensì analizza le proprietà delle diverse possibili soluzioni, mettendo in evidenza sia gli aspetti "positivi" che quelli'negativi".

Dato un insieme E finito, il numero dei suoi elementi si indica con $|E|$. Quindi $|N|$ indica il numero complessivo dei giocatori. Indichiamo $|N|$ con n.

Imputazioni

- Sia $G = (N, v)$ un gioco a pagamenti laterali.
- Un elemento $X = (X_1, ..., X_n) \in R^n$ si dice allocazione.
- Se un'allocazione X verifica $\Sigma_{i=1}^{n} X_i = v(N)$, allora X viene detta pre-imputazione.
- Una pre-imputazione che soddisfa anche la condizione $X_i \geq v(\{i\}) \; \forall i \in N$ viene detta imputazione.

Imputazioni

- Una pre-imputazione è una ripartizione di $v(N)$ tra i giocatori.
- Per i giochi coesivi (e quindi anche per quelli superadditivi) è ragionevole immaginare che si formi la grande coalizione N e che quindi una "soluzione" debba consistere nello scegliere una o più di una possibile ripartizione di $v(N)$.
- La condizione $\Sigma_{i=1}^{n} X_i = v(N)$, può essere "letta" come: $\Sigma_{i=1}^{n} X_i \leq v(N)$, (che per i giochi coesivi rappresenta una condizione di fattibilità) e $\Sigma_{i=1}^{n} X_i \geq v(N)$, che rappresenta invece una condizione di efficienza o di "razionalità collettiva".
- La condizione $X_i \geq v(\{i\})$ è interpretabile come condizione di "razionalità individuale" per il giocatore i.

Imputazioni

- Trovare le imputazioni del gioco di maggioranza;
- Provare che se (N, v) è coesivo, allora il gioco ha imputazioni.

Nucleo

- Abbiamo introdotto, a livello di interpretazione, l'idea di razionalità collettiva e di razionalità individuale.
- Esistono anche a condizioni di razionalità "intermedia", che sono date evidentemente da condizioni del tipo: $\Sigma_{i \in S} X_i \geq v(S)$, dove S è una generica coalizione.
- Questa idea elementare porta immediatamente ad uno dei concetti chiave di "soluzione" per un gioco a pagamenti laterali: è l'idea di nucleo.

Nucleo

Sia $G = (N, v)$ un gioco a pagamenti laterali.
Il nucleo di G è l'insieme di tutte le allocazioni di R^n che soddisfano alle seguenti condizioni: $\Sigma_{i \in S} X_i \geq v(S)$ per ogni $S \subseteq N$, $\Sigma_{i \in N} X_i \leq v(N)$,

Esempi

ESEMPIO **di gioco con nucleo vuoto** Sia $N = \{1, 2\}$ e sia $G = (N, v)$ un gioco a pagamenti laterali, con $v(\{1\}) = v(\{2\}) = 1$ e $v(\{1, 2\}) = 0$. Si vede facilmente che tale gioco non ha imputazioni, quindi ha nucleo vuoto. Non è inoltre un gioco coesivo.

Nucleo del gioco di maggioranza

Il "gioco di maggioranza" è invece un esempio di gioco superadditivo (quindi coesivo) con nucleo vuoto. **Gioco di maggioranza.** È superadditivo e questo implica avere imputazioni, dunque la seconda condizione della definizione di nucleo è garantita; supponiamo che $\Sigma_{i \in S} X_i \geq v(S) \ \ \forall S \subseteq N$. Deve valere per tutte le coalizioni S, in particolare per S con 2 elementi.

$X_1 + X_2 \geq v(\{1,2\}) = 1$

$X_1 + X_3 \geq v(\{1,3\}) = 1$

$X_2 + X_3 \geq v(\{2,3\}) = 1$

Sommando membro a membro si ottiene: $2(X_1 + X_2 + X_3) \geq 3$;

Ma $X_1 + X_2 + X_3 = 1$, allora dalla disequazione $2(X_1 + X_2 + X_3) \geq 3$ si ottiene $2 \geq 3$, cioè un assurdo, quindi il nucleo è vuoto.

Nucleo del gioco dei Guanti

Vediamo ora un esempio con nucleo non vuoto.
Gioco dei guanti. Supponiamo che $|L| = 2 < |R| = 3$, detto $N = \{1_L, 2_L, 3_R, 4_R, 5_R\}$ l'insieme dei giocatori (due con un guanto sinistro e gli altri tre con un guanto destro): si ha $v(N) = 2$.

- $(1, 1, 0, 0, 0)$ sta nel nucleo.
- È l'unico elemento del nucleo. Infatti se $X_{I_L} + X_{2_L} < 2$ e $X_{3_R} > 0$, abbiamo che $X_{1_L} + X_{2_L} + X_{4_R} + X_{5_R} = V(N) - X_{3_R} < 2$, che è assurdo perché la coalizione $S = \{1_L, 2_L, 4_R, 5_R\}$ ha "costruito" due paia di guanti; quindi deve necessariamente essere $X_{3_R} = 0$ e per un analogo argomento anche $X_{4_R} = X_{5_R} = 0$,
- dunque $X_{1_L} + X_{2_L} = 2$.
- Inoltre se $X_{1_L} > 1$ e $X_{2_L} < 1$, si avrebbe $X_{2_L} + X_{3_R} < 1$, ma allora $1 > X_{2_L} + X_{3_R} \geq v(\{2_L, 3_R\}) = 1$ che è evidentemente impossibile, allora non si può altro che avere $X_{1_L} = X_{2_L} = 1$.

Giochi semplici.

- In Sociologia e nelle Scienze Politiche, i giochi cooperativi ad utilità trasferibile sono stati utilizzati per studiare svariati contesti decisionali che comprendono al loro interno uno scrutinio elettorale.
- Si consideri un dato insieme N di n "giocatori".
- Si immagini una regola la quale dice quale requisito debba soddisfare un gruppo di giocatori per essere in grado di far passare una decisione.
- In questo contesto è naturale pensare ad un gioco in cui ogni gruppo è o vincente o perdente, nel senso che o ottiene di far passare la propria decisione o non ottiene di farla passare.
- L'idea è quella di costruire un gioco in cui ogni coalizione S è o vincente $(v(S) = 1)$ o perdente $(v(S) = 0)$, $v : P(N) \longrightarrow \{0, 1\}$.

Gioco semplice

Un gioco a pagamenti laterali (N, v) si dice semplice se:
$\forall S \subseteq N,\ v(S) = 1$ oppure $v(S) = 0$ cioè $v : P(N) \longrightarrow \{0, 1\}$ e inoltre $v(N) = 1$

Gioco semplice

- L'interpretazione è che la coalizione S che ha valore 1 possa decidere sul problema senza l'aiuto dei giocatori al di fuori di S.
- Per questo motivo, queste coalizioni sono chiamate vincenti.
- Si noti che nella definizione di gioco semplice, la coalizione N di tutti i giocatori è in grado di aggiudicarsi 1.

Consiglio dell’ONU

Sia $N = \{1, ..., 15\}$ l’insieme dei membri dell’ONU, di cui 5 sono permanenti, mentre gli altri non sono permanenti. Una coalizione $S \subseteq N$ è "vincente" se

$\{1, ..., 5\} \subseteq S$

$|S| \geq 9$

Come è fatto il nucleo di questo gioco?

Giocatore di veto

L'esempio sul Consiglio dell'ONU ci permette di introdurre un altro concetto connesso ai giochi semplici, quello di giocatore di veto. Gli stati permanenti del Consiglio di Sicurezza hanno infatti la possibilità di porre il loro veto alle scelte decisionali del Consiglio stesso. Questa proprietà nei termini formali della teoria si traduce nella seguente definizione:

"giocatori di veto". Sia $G = (N, v)$ un gioco semplice. Un elemento $i \in N$ si dice giocatore di veto se
$\forall S \subseteq N \; i \notin S \Longrightarrow v(S) = 0$

Dittatore

Sia (N, v) un gioco semplice e sia $(X_1, ..., X_n)$ un'imputazione. i è detto "dittatore" se $v(i) = 1$.

Essere dittatore non implica avere diritto di veto.

Giocatori di veto

Dato un gioco semplice $G = (N, v)$, il suo nucleo è non vuoto se e solo se c'è almeno un giocatore di veto.

Dimostrazione. $(\Rightarrow)$ Si supponga che v non abbia giocatori di veto. Allora, per ogni $i \in N$, esiste una coalizione $S \subseteq N$ tale che $i \notin S$ e $v(S) = 1$. Per un'imputazione X che sta nel nucleo, abbiamo che:

$\Sigma_{j \in N} X_j = v(N) = 1$

$\Sigma_{j \neq i} X_j \geq \Sigma_{j \in S} X_j \geq v(S) = 1$

Quindi $X_i = 0$ per ogni $i \in N$, e perciò X non può essere un'imputazione. Questa contraddizione prova che il nucleo è vuoto.

Giocatori di veto

($\Leftarrow$) Si supponga ora che v abbia almeno un giocatore di veto. Sia S l'insieme di tali giocatori di veto $|S| \geq 1$) Sia X un' allocazione tale che
$\Sigma_{i \in S} X_i = 1$
con $X_i \geq 0 \; \forall i \in S$ e $X_i = 0$ per $i \notin S$
Se T è una coalizione vincente, $S \subseteq T$ e poichè la somma delle componenti dell'allocazione in S deve essere pari ad 1 si ottiene
$\Sigma_{i \in T} X_i \geq \Sigma_{i \in S} X_i = v(T)$
quindi X rispetta la razionalità intermedia per ogni $T \subset N$ oltre che quella individuale e collettiva. Quindi X appartiene al nucleo.