Teoria dei Giochi

Anna Torre

Almo Collegio Borromeo 24 marzo 2015

email: anna.torre@unipv.it

sito web del corso:www-dimat.unipv.it/atorre/borromeo2015.html

ELIMINAZIONE DI STRATEGIE DOMINATE

Conoscenza e conoscenza comune sono elementi centrali nella teoria economica e nella teoria dei giochi.

I \ II	su	giù
sinistra	(2, 2)	(5, 1)
centro	(3, 4)	(4, 2)
destra	(2, 1)	(3, 4)

Per il giocatore I la strategia "destra" è strettamente dominata da "centro", dunque "destra" può essere eliminata.

ELIMINAZIONE DI STRATEGIE DOMINATE

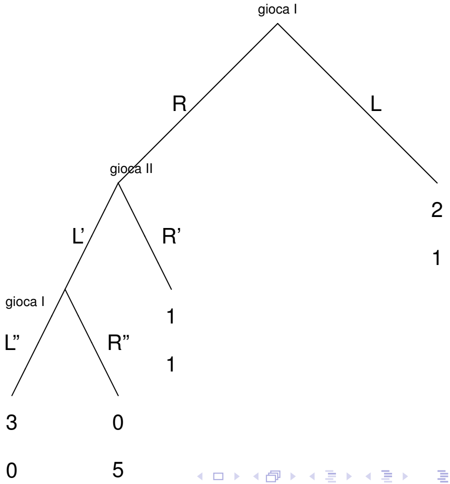
Proseguiamo nella eliminazione:

- il giocatore II a questo punto può eliminare “giù” perché strettamente dominata da “su”,
- II è convinto che I abbia eliminato “destra”, perché I giocasse “destra” II non avrebbe più alcun motivo di eliminare “giù”.

Il metodo della eliminazione iterata di strategie strettamente dominate dà per scontato che i giocatori siano intelligenti e razionali, che ciascuno sappia che gli altri lo sono, che ciascuno sappia che gli altri sanno che loro sono intelligenti e razionali, ecc..

INDUZIONE A RITROSO

Un altro esempio di assunzione implicita della conoscenza comune della intelligenza e razionalità di tutti i gicatori è dato dalla cosidetta “induzione a ritroso”.



CONOSCENZA E CONOSCENZA COMUNE

- Supponiamo che tre ragazze, tutte con la faccia sporca, siano sedute in cerchio e ciascuna di esse veda la faccia delle altre due.
- Supponiamo inoltre che le tre ragazze siano intelligenti e razionali e abbiano assoluta fiducia nella intelligenza e razionalità delle altre, e abbiano assoluta fiducia nel fatto che ciascuna delle altre ha assoluta fiducia nel fatto che ciascuna ha assoluta fiducia nella intelligenza e razionalità delle altre e così via.
- Supponiamo inoltre che l'intelligenza provochi l'effetto che ciascuna di esse arrossisce se e soltanto se ha la certezza di avere la faccia sporca.

CONOSCENZA E CONOSCENZA COMUNE

Osserviamo i due seguenti fatti:

1. Ciascuna delle ragazze vede le altre, quindi sa che almeno una di esse ha la faccia sporca;
2. Nessuna ragazza ha la possibilità di sapere se la sua faccia è sporca, perché nella stanza non esistono specchi.

Se questa è la situazione, nessuna ragazza ha motivo di arrossire.

IL BANDITORE

Supponiamo ora che entri una persona e faccia il seguente annuncio: “Almeno una delle ragazze qui presenti ha la faccia sporca”.
Ovviamente viene annunciato un fatto già noto a tutti, ma la situazione cambia.
Cosa è cambiato?
È cambiato il fatto che l’annuncio mette a conoscenza le ragazze del fatto che tutte e tre sono a conoscenza del fatto che almeno una di loro ha la faccia sporca.

LA CONOSCENZA COMUNE

Quali conseguenze ha questo ?

- Indichiamo con A, B, C le tre ragazze.
- Mettiamoci dal punto di vista di A
- A pensa: se io ho la faccia pulita, B e C osservano ciascuna una sola faccia sporca. Quindi per esempio B, se C non arrossisce, sa di avere la faccia sporca. C non arrossisce, quindi presto B avrà la certezza che le facce sporche sono almeno due e, sempre nel caso che la mia faccia sia pulita, arrossirà.
- Ma B non arrossisce, io ho la certezza che le facce sporche sono tre e poichè sono “intelligente” mi tocca di arrossire.

Simmetricamente anche ciascuna delle altre ragazze fa lo stesso ragionamento e quindi ha la certezza di avere la faccia sporca, dunque arrossisce.

LA CONOSCENZA COMUNE

- L'ipotesi di conoscenza comune ha permesso un passaggio di informazione "silenzioso" dovuto semplicemente alla osservazione, da parte di ciascuna ragazza, dei comportamenti delle altre e alla certezza che tali comportamenti dovevano essere intelligenti.
- Ciascuna ragazza "fidandosi dei comportamenti dell'altra" alla fine assume informazione.

Le Tre Signorine

Uno stato del mondo corrisponde a sapere come sono (pulite o sporche) le facce di A, B, C:

	a	b	c	d	e	f	g	h
A	S	S	S	S	P	P	P	P
B	S	S	P	P	S	S	P	P
C	S	P	S	P	S	P	S	P

Le Tre Signorine

$$\Omega = \{a, b.c, d, e, f, g, h\}.$$

è l'insieme degli stati del momdo

Noi abbiamo supposto che le facce siano sporche e quindi di trovarci nello stato $\omega = a$.

Le partizioni di A, B, C sullo stato del mondo sono :

$$H_A = \{\{a, e\}, \{b, f\}, \{c, g\}, \{d, h\}\},$$

$$H_B = \{\{a, c\}, \{b, d\}, \{e, g\}, \{f, h\}\},$$

$$H_C = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f\}, \{g, h\}\}.$$

Le Tre Signorine

Queste partizioni corrispondono alla situazione di informazione precedente l'annuncio che dà la conoscenza comune del fatto che almeno una ragazza ha la faccia sporca. Osserviamo che l'unica partizione "meno fine" [1] di tutte le H_A, H_B, H_C è la partizione banale Ω, e ciò corrisponde al fatto che l'unico evento conoscenza comune è Ω.

---

[1] Date due partizioni H e K di Ω, si dice che H è meno fine di K se per ogni $\omega \in \Omega$ si ha $k(\omega) \subseteq h(\omega)$. In questo caso si dice anche che K è più fine di H.

Le Tre Signorine

L'annuncio dice che lo stato h è falso ed è equivalente a fare in modo che ciascuna ragazza distingua lo stato h da tutti gli altri. Le nuove partizioni di A, B, C dopo l'annuncio diventano dunque:

$$H'_A = \{\{a,e\},\{b,f\},\{c,g\},\{d\},\{h\}\},$$

$$H'_B = \{\{a,c\},\{b,d\},\{e,g\},\{f\},\{h\}\},$$

$$H'_C = \{\{a,b\},\{c,d\},\{e,f\},\{g\},\{h\}\}.$$

Questa volta c'è un'altra partizione meno fine di H'_A, H'_B, H'_C ed è

$$M' = \{\Omega - \{h\}\ ,\ \{h\}\}.$$

Le Tre Signorine

Vediamo ora la situazione dal punto di vista di A, schematizzandola nel modo seguente: supponiamo che in un primo istante C abbia la possibilità di arrossire se è certa di avere la faccia sporca, in un secondo istante sia B ad avere questa possibilità, sempre se è certa di avere la faccia sporca e che in un terzo istante questa possibilità la abbia A.

Le Tre Signorine

Istante 1) Poichè siamo in a, C non arrossisce e in questo modo rende conoscenza comune il fatto, peraltro già noto a tutti, che C non è l'unica ragazza con la faccia sporca e pertanto che lo stato g è falso e quindi distinguibile dagli altri. A questo punto le nuove partizioni diventano:

$$H_A'' = \{\{a,e\},\{b,f\},\{c\}\{,g\},\{d\},\{h\}\},$$

$$H_B'' = \{\{a,c\},\{b,d\},\{e\},\{g\},\{f\},\{h\}\},$$

$$H_C'' = \{\{a,b\},\{c,d\},\{e,f\},\{g\},\{h\}\}.$$

Le Tre Signorine

Istante 2) B non arrossisce. In questo modo rende conoscenza comune il fatto che e ed f sono falsi e quindi distinguibili da tutti gli altri eventi di cui non c'è certezza che siano falsi. La nuova partizione diventa dunque:

$$H_A''' = \{\{a\}, \{e\}, \{b\}, \{f\}, \{c\}\{, g\}, \{d\}, \{h\}\},$$

$$H_B''' = \{\{a, c\}, \{b, d\}, \{e\}, \{g\}, \{f\}, \{h\}\},$$

$$H_C''' = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f\}, \{g\}, \{h\}\}.$$

Le Tre Signorine

Istante 3) A ha la percezione esatta dello stato del mondo (il suo insieme di informazione è un solo punto) e quindi arrossisce.

Conoscenza comune e informazione asimmetrica

Il più noto risultato ottenuto con la definizione formale di conoscenza comune è il teorema di Aumann, che assicura che, sotto opportune ipotesi, giocatori razionali non possono essere d'accordo di non essere d'accordo sulla probabilità che ciascuno di essi assegna a un dato evento, se queste probabilità sono conoscenza comune.

Essere daccordo di non essere daccordo

- L'idea intuitiva del teorema è: se un giocatore sa che gli altri giocatori hanno aspettative diverse dalle sue, egli rivede le sue aspettative per tener conto di quelle degli altri.
- perché il risultato sia valido è necessario che ciascuno pensi che il modo di ragionare degli altri è corretto e che la differenza nelle aspettative riflette solo qualche informazione obiettiva.
- È inoltre necessario che tutti i giocatori abbiano quella che si dice una "common prior", e cioè che abbiano una distribuzione di probabilità a priori uguale tra di loro, e che questa distribuzione di probabilità a priori sia conoscenza comune
- Le esperienze diverse portano ad avere distribuzioni di probabilità diverse da quelle iniziali
- Nel momento però in cui queste nuove probabilità diventano conoscenza comune, ciascuno le rivede per l'assoluta fiducia che ha nella intelligenza e razionalità degli altri.

essere daccordo di non essere daccordo

Aumann, Robert J. [1976]: Agreeing to Disagree, Annals of Statistics, 4, 1236-1239. Sia $\omega \in \Omega$. Supponiamo che sia conoscenza comune in ω che la probabilità a posteriori di un evento E è q_i per il giocatore i e q_j per il giocatore j. Allora $q_i = q_j$.
Osserviamo che il teorema di Aumann assicura soltanto che le probabilità a posteriori sono uguali, ma non dice affatto che a posteriori i giocatori sappiano per quali motivi la probabilità dell'altro è quella annunciata

$$\Omega = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\},$$

e supponiamo che su Ω ci sia una distribuzione di probabilità a priori uniforme. Il giocatore 1 vede solo la prima componente dell'elemento di Ω, mentre il giocatore 2 vede solo la seconda componente. Dunque

$$H_1 = \{\{(0,0),(0,1)\},\{(1,0),(1,1)\}\}$$

e

$$H_2 = \{\{(0,0),(1,0)\},\{(0,1),(1,1)\}\}.$$

In $\omega = (0,0)$, calcoliamo le probabilità a posteriori dell'insieme $E = \{(0,0),(1,1)\}$. Si ha $q_1(E) = q_2(E) = 1/2$. Ma quando entrambi i giocatori annunciano queste probabilità nessuno dei due dà all'altro alcuna nuova informazione. Infatti, per esempio, vediamo la situazione del giocatore 1. In ω egli vede $\{(0,0),(0,1)\}$ e il fatto che il giocatore 2 annuncia 1/2 per 1 è perfettamente compatibile con il fatto che 2 veda invece $\{(0,1),(1,1)\}$. Nessuna informazione sul procedimento logico che ha portato 2 a dichiarare 1/2 è passata.

Dadi

IL primo giocatore osserva l'esito del primo dado (rosso) e il secondo osserva l'esito del secondo dado (blu). Quale probabilità assegnano al fatto che lo stato vero del mondo sia E?(insieme dei pallini neri).

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4				●	●	●
5		●	●			
6	●					

Dadi

Le prior di entrambi sono $\frac{1}{6}$. Dopo aver osservato ciascuno l'esito del suo dado chi osserva il dado blu aggiorna a $\frac{1}{6}$ mentre il giocatore che osserva il dado rosso aggiorna a $\frac{1}{3}$. Quando le informazioni vengono scambiate il giocatore che osserva il dado blu è sicuro che lo stato vero del mondo è $(5, 3)$ e quindi assegna ad E probabilità 1. Una volta rese note queste nuove probabilità, il giocatore che osserva il dado rosso è certo che lo stato vero del mondo è uno fra $(5, 2)$ e $(5, 3)$ e quindi assegna ad E probabilità 1.

Dadi

	1	2	3	4	5	6
1					●	●
2					●	●
3					●	●
4					●	●
5						
6						

Dadi

Le prior di entrambi sono $\frac{8}{36}$. Dopo aver osservato ciascuno l'esito del suo dado chi osserva il dado blu aggiorna a $\frac{2}{3}$ mentre il giocatore che osserva il dado rosso aggiorna a $\frac{1}{3}$. Quando le informazioni vengono scambiate il giocatore che osserva il dado blu è sicuro che lo stato vero del mondo non è $(5, 5)$ nè $(5, 6)$ quindi assegna ad E probabilità 1. Analogo discorso per chi osserva il dado blu.

	1	2	3	4	5	6
1					●	●
2					●	●
3					●	●
4					●	●
5	●	●				
6	●	●				

Dadi

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

	1	2	3	4	5	6
1						●
2					●	
3				●		
4			●			
5		●				
6	●					

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5		●				
6	●					