

Esercizi

Monica Salvioli

22 Dicembre 2022

Nucleo

Determinare il nucleo nel seguente gioco:

$$N = \{1,2,3\}$$

$$v(\emptyset) = 0$$

$$v(\{1\}) = 0$$

$$v(\{2\}) = 0$$

$$v(\{3\}) = 0$$

$$v(\{1,2\}) = 2$$

$$v(\{1,3\}) = 2$$

$$v(\{2,3\}) = 4$$

$$v(\{1,2,3\}) = 5$$

Nucleo

Determinare il nucleo nel seguente gioco:

$$N = \{1,2,3\}$$

$$v(\emptyset) = 0$$

$$v(\{1\}) = 0$$

$$v(\{2\}) = 0$$

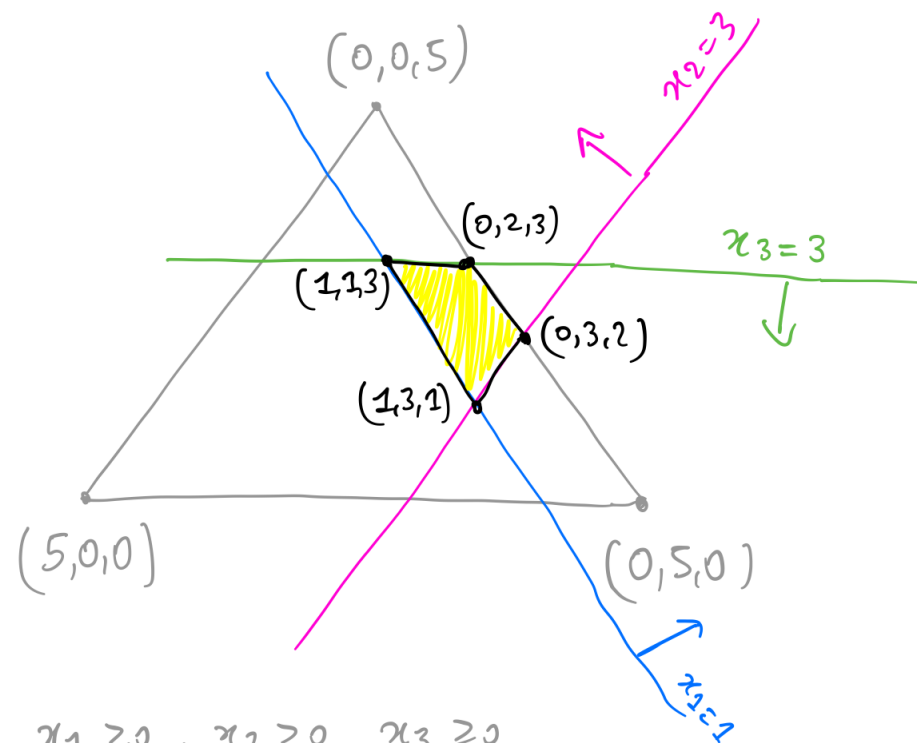
$$v(\{3\}) = 0$$

$$v(\{1,2\}) = 2$$

$$v(\{1,3\}) = 2$$

$$v(\{2,3\}) = 4$$

$$v(\{1,2,3\}) = 5$$



$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 \geq 2 \rightarrow x_3 \leq 3$$

$$x_1 + x_3 \geq 2 \rightarrow x_2 \leq 3$$

$$x_2 + x_3 \geq 4 \rightarrow x_1 \leq 1$$

Nucleo

Determinare il nucleo nel seguente gioco:

$$N = \{1,2,3\}$$

$$v(\emptyset) = 0$$

$$v(\{1\}) = 10$$

$$v(\{2\}) = 15$$

$$v(\{3\}) = 20$$

$$v(\{1,2\}) = 40$$

$$v(\{1,3\}) = 30$$

$$v(\{2,3\}) = 40$$

$$v(\{1,2,3\}) = 60$$

Nucleo

Determinare il nucleo nel seguente gioco:

$$N = \{1,2,3\}$$

$$v(\emptyset) = 0$$

$$v(\{1\}) = 10$$

$$v(\{2\}) = 15$$

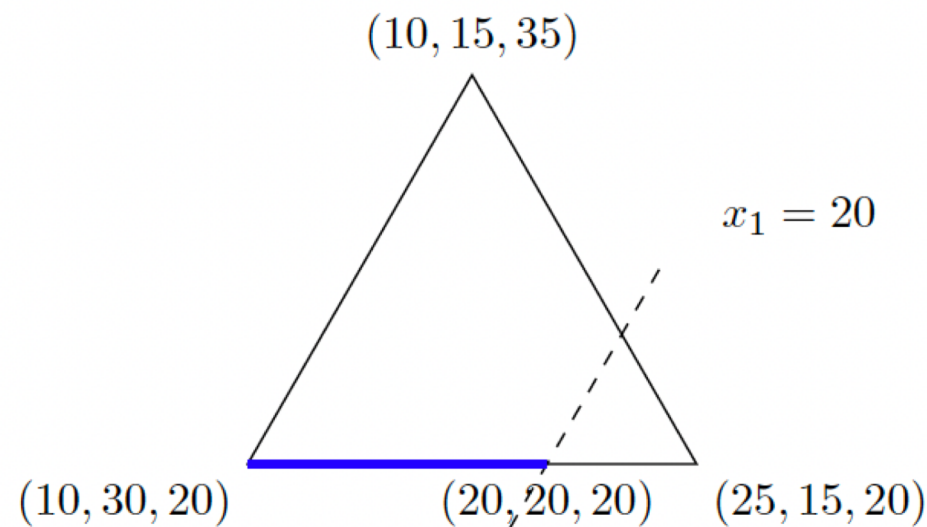
$$v(\{3\}) = 20$$

$$v(\{1,2\}) = 40$$

$$v(\{1,3\}) = 30$$

$$v(\{2,3\}) = 40$$

$$v(\{1,2,3\}) = 60$$



Gioco di maggioranza

Ci sono tre giocatori che devono prendere una decisione a maggioranza.

$$N = \{1,2,3\}$$

$$v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$$

$$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = v(\{1,2,3\}) = 1$$

Determinare il valore Shapley.



Gioco di maggioranza

Possiamo osservare che i tre giocatori sono simmetrici. Quindi $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

Dal momento che il valore Shapley soddisfa l'efficienza, si ha anche $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = v(N)$.

Quindi $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{1}{3}$.



Il gioco dei guanti

Ci sono tre giocatori, uno ha un guanto sinistro e due un guanto destro. Naturalmente, un guanto spaiato non è utile, quindi assumiamo che lo scopo del gioco sia formare paia di guanti. Che funzione caratteristica scegliamo?

Per esempio, quella che assegna a ogni coalizione il numero di paia di guanti che riesce a formare. Si ha quindi:

$$\begin{array}{c} D D S \\ N = \{1,2,3\} \end{array}$$

$$v(\emptyset) = v(\{i\}) = v(\{1,2\}) = 0$$

$$v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = v(N) = 1$$

Determinare il valore Shapley.



Il gioco dei guanti

Calcolo il valore Shapley per il giocatore 3.

$$\begin{aligned}\sigma_3 &= \frac{0!2!}{3!} (v(3) - v(\emptyset)) + \\ &\quad + \frac{1!1!}{3!} (v(13) - v(1)) + (v(2,3) - v(2)) + \\ &\quad + \frac{2!0!}{3!} (v(N) - v(12)) = \\ &= \frac{1}{3} \cancel{(0-0)} + \frac{1}{6} (1-0 + 1-0) + \frac{1}{3} \cdot (1-0) \\ &= \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{4}{6}\end{aligned}$$

I giocatori 1 e 2 sono simmetrici
($\sigma_1 = \sigma_2$) e vale l'efficienza ($\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = v(N)$)
quindi $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{6}$.



I partiti

Ci sono 4 partiti:

- A ottiene il 40% dei voti;
- B ottiene il 23%;
- C ottiene il 19%;
- D ottiene il 18%

Per prendere una decisione è necessario avere il 51%. Trovare il valore Shapley.

Gioco dei
PARTITI

A	B	C	D
40	23	19	18

maggioranza 51

$v(\{1,2\}) = 1$ $v(\{1,3\}) = 1$ $\{1,4\}$
 $\{1,2,3\}$ $v(\{1,2,4\})$ $\{1,3,4\}$
 $\{2,3,4\}$ $\{1,2,3,4\}$

Coalizioni vincenti

2,3,4 sono giocatori simmetrici

$$\frac{s! (n-s-1)!}{n!}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \frac{2!}{4!} (v(\{1,2\}) + v(\{1,3\}) + v(\{1,4\})) \\
 &\quad + \frac{2!}{4!} (v(\{1,2,3\}) + v(\{1,2,4\}) + v(\{1,3,4\})) \\
 &= \frac{2!}{4!} (3) + \frac{2!}{4!} (3) = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

VALORE SHAPLEY

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right)$$

$\frac{1}{2} : 3$

Esercizio

Quattro ragazzi (Alberto, Bernardo, Carlo e Davide) devono dividersi in due camere con due letti ciascuna. Date le loro preferenze:

Alberto: $B \succ C \succ D$;

Bernardo: $C \succ A \succ D$;

Carlo: $A \succ B \succ D$;

Davide: $A \succ B \succ C$.

dire se esiste un matching stabile. (No)

Le preferenze di quale giocatore sono irrilevanti? (Davide)

Esercizio



Consideriamo il seguente problema di matching, con

$$\mathcal{W} = \{\text{Catwoman, Wonderwoman}\}$$
$$\mathcal{M} = \{\text{Superman, Batman, Flash}\}$$

Supponiamo che Catwoman preferisca Batman a Superman e Superman a Flash, mentre Wonderwoman preferisca Superman a Flash e Flash a Batman.

1. Se le donne visitano gli uomini, quale è un insieme stabile?
2. Determinare le preferenze degli uomini (considerando anche l'opzione: "preferisco stare da solo") in modo che ci sia un altro insieme stabile.

1. (BATMAN, CATWOMAN) (SUPERMAN, WONDERWOMAN) FLASH
"

2. Batman $W > \phi > C$

Superman $C > W > \phi$

Flash $C > W > \phi$

(Superman, Catwoman) (Flash, Wonderwoman) Batman
"

Varianti: matrimoni poligami

Tre studenti: A,B,C vogliono iscriversi a Harvard dove ci sono due posti disponibili o Yale che ha un solo posto disponibile.

Le preferenze degli studenti sono:

$A : Y > H$ $B : Y > H$ $C : H > Y$

mentre quelle delle università:

$H : A > B > C$ $Y : C > B > A$

Quale soluzione troviamo applicando l'algoritmo con gli studenti che visitano? E l'algoritmo con le università che visitano?

Varianti: matrimoni poligami

Studenti in visita

A - H B - Y C - H

Università in visita

A - H B - H C - Y