Problemi di matching

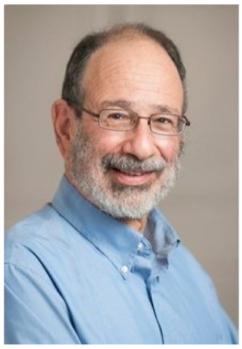
Monica Salvioli

21 Dicembre 2022

Un po’ di storia

Lloyd S. Shapley

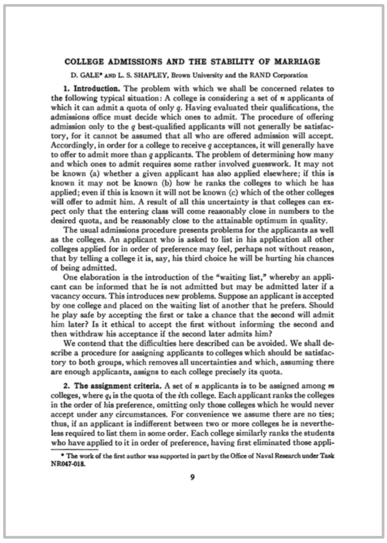
«Per la teoria delle allocazioni stabili e per le pratiche di progettazione del mercato»



Alvin E. Roth

Mercati senza un prezzo

- Gli economisti di solito studiano mercati in cui la domanda e il prezzo si aggiustano
- Ma ci sono anche mercati dove i partecipanti non possono semplicemente avere quello che vogliono, anche se possono permetterselo: devono anche essere scelti.
- Se non è il prezzo a regolare il mercato, come si regolano questi mercati?



COLLEGE ADMISSIONS AND THE STABILITY OF MARRIAGE

D. GALE* AND L. S. SHAPLEY, Brown University and the RAND Corporation

1. Introduction. The problem with which we shall be concerned relates to the following typical situation: A college is considering a set of n applicants of which it can admit a quota of only q. Having evaluated their qualifications, the admissions office must decide which ones to admit. The procedure of offering admission only to the q best-qualified applicants will not generally be satisfactory, for it cannot be assumed that all who are offered admission will accept. Accordingly, in order for a college to receive q acceptances, it will generally have to offer to admit more than q applicants. The problem of determining how many and which ones to admit requires some rather involved guesswork. It may not be known (a) whether a given applicant has also applied elsewhere; if this is known it may not be known (b) how he ranks the colleges to which he has applied; even if this is known it will not be known (c) which of the other colleges will offer to admit him. A result of all this uncertainty is that colleges can expect only that the entering class will come reasonably close in numbers to the desired quota, and be reasonably close to the attainable optimum in quality.

The usual admissions procedure presents problems for the applicants as well as the colleges. An applicant who is asked to list in his application all other colleges applied for in order of preference may feel, perhaps not without reason, that by telling a college it is, say, his third choice he will be hurting his chances of being admitted.

One elaboration is the introduction of the "waiting list," whereby an applicant can be informed that he is not admitted but may be admitted later if a vacancy occurs. This introduces new problems. Suppose an applicant is accepted by one college and placed on the waiting list of another that he prefers. Should he play safe by accepting the first or take a chance that the second will admit him later? Is it ethical to accept the first without informing the second and then withdraw his acceptance if the second later admits him?

We contend that the difficulties here described can be avoided. We shall describe a procedure for assigning applicants to colleges which should be satisfactory to both groups, which removes all uncertainties and which, assuming there are enough applicants, assigns to each college precisely its quota.

2. The assignment criteria. A set of n applicants is to be assigned among m colleges, where q_i is the quota of the ith college. Each applicant ranks the colleges in the order of his preference, omitting only those colleges which he would never accept under any circumstances. For convenience we assume there are no ties; thus, if an applicant is indifferent between two or more colleges he is nevertheless required to list them in some order. Each college similarly ranks the students who have applied to it in order of preference, having first eliminated those appli-

* The work of the first author was supported in part by the Office of Naval Research under Task NR047-018.

9

Esempi famosi

L'esempio classico è quello di formare coppie donna-uomo (matching uno a uno).

Esempi famosi

L'esempio classico è quello di formare coppie donna-uomo (matching uno a uno).

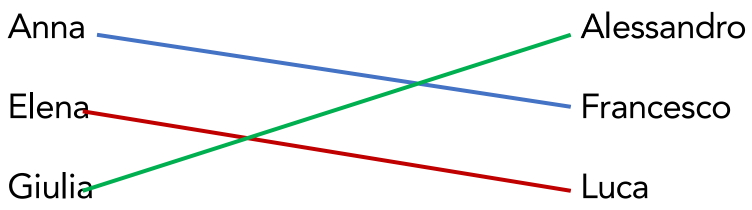
Ma possiamo abbinare:

- Studenti e università
- Medici specializzandi e ospedali
- Aziende e lavoratori
- Utenti e server
- Pazienti e donatori di organo

Un esempio

Anna	Alessandro
Elena	Francesco
Giulia	Luca

Un esempio



(Anna- Francesco, Elena – Luca, Giulia – Alessandro) è un matching.

Formalizziamo: un problema di matching

Definizione

Un problema di matching è costituito da:

- due insiemi finiti $\mathcal{W}$ ed $\mathcal{M}$ che rappresentano le due facce del mercato
- un sottoinsieme di coppie ammissibili $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}\times\mathcal{M}$
- per ogni W $\in \mathcal{W}$, una relazione di preferenza $\prec_W$ su $\mathcal{M}$ e una quota $q_W \in \mathbb{N}$
- per ogni $m \in \mathcal{M}$, una relazione di preferenza $\prec_m$ su $\mathcal{W}$ e una quota $q_m \in \mathbb{N}$

Formalizziamo: un problema di matching

Definizione

Un problema di matching è costituito da:

- due insiemi finiti $\mathcal{W}$ ed $\mathcal{M}$ che rappresentano le due facce del mercato
- un sottoinsieme di coppie ammissibili $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}\times\mathcal{M}$
- per ogni W ∈ $\mathcal{W}$, una relazione di preferenza $\prec_W$ su $\mathcal{M}$ e una quota $q_W \in \mathbb{N}$
- per ogni $m \in \mathcal{M}$, una relazione di preferenza $\prec_m$ su $\mathcal{W}$ e una quota $q_m \in \mathbb{N}$

Il secondo punto ci dice che certi accoppiamenti potrebbero non essere ammissibili. Nell'esempio dei corsi di studio e degli studenti, non tutti gli studenti sono interessati a tutti i corsi di studio, certi corsi di studio potrebbero non voler accettare una certa tipologia di studenti.

Formalizziamo: un problema di matching

Definizione

Un problema di matching è costituito da:

- due insiemi finiti $\mathcal{W}$ ed $\mathcal{M}$ che rappresentano le due facce del mercato
- un sottoinsieme di coppie ammissibili $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}\times\mathcal{M}$
- per ogni W ∈ $\mathcal{W}$, una relazione di preferenza $\prec_W$ su $\mathcal{M}$ e una quota $q_W \in \mathbb{N}$
- per ogni $m \in \mathcal{M}$, una relazione di preferenza $\prec_m$ su $\mathcal{W}$ e una quota $q_m \in \mathbb{N}$

Gli ultimi due punti ci dicono che ogni partecipante deve fare una classica su tutte le possibili opzioni. Per esempio, gli studenti hanno un ordine preciso sui corsi di studio che vogliono frequentare.

Formalizziamo: matching ammissibili

Definizione

Un matching ammissibile è un insieme $\boldsymbol{\mathcal{L}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{A}}$ tale che

- ogni W $\in \boldsymbol{\mathcal{W}}$ appare al più in q_W coppie in $\boldsymbol{\mathcal{L}}$
- ogni $m \in \boldsymbol{\mathcal{M}}$ appare al più in q_m coppie in $\boldsymbol{\mathcal{L}}$

Nel caso di matching uno-uno si ha $q_w = 1$ e $q_m = 1$;

nel caso di matching uno-molti $q_w \geq 1$ e $q_m = 1$;

nel caso di matching molti-molti $q_w \geq 1$ e $q_m \geq 1$.

Soluzioni

Quale è una soluzione razionale (matching efficiente/ ottimale) di un problema di matching?

Partiamo da un esempio!

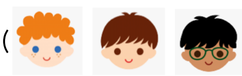
Il problema del matrimonio

3. Stable assignments and a marriage problem.

A certain community consists of n men and n women. Each person ranks those of the opposite sex in accordance with his or her preferences for a marriage partner. We seek a satisfactory way of marrying off all members of the community. Imitating our earlier definition, we call a set of marriages *unstable* (and here the suitability of the term is quite clear) if under it there are a man and a woman who are not married to each other but prefer each other to their actual mates.

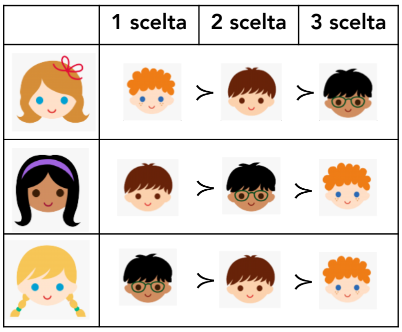
QUESTION: *For any pattern of preferences is it possible to find a stable set of marriages?*

Il problema del matrimonio

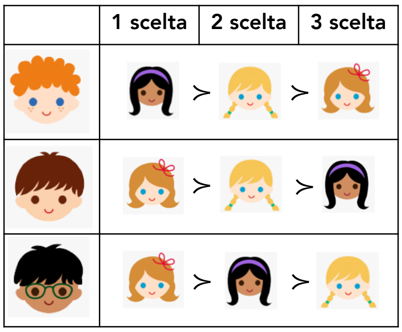
Consideriamo due insiemi: () ()

Il problema del matrimonio

Consideriamo due insiemi: () ()



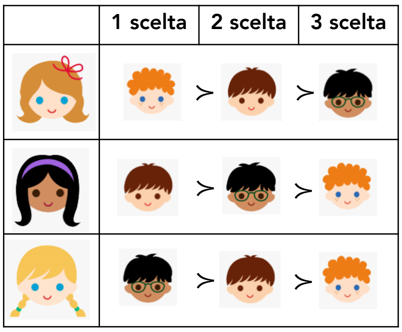
	1 scelta	2 scelta	3 scelta
	$\succ$	$\succ$	
	$\succ$	$\succ$	
	$\succ$	$\succ$	



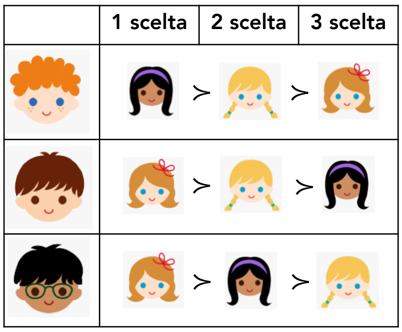
	1 scelta	2 scelta	3 scelta
	$\succ$	$\succ$	
	$\succ$	$\succ$	
	$\succ$	$\succ$	

Il problema del matrimonio

Consideriamo due insiemi: () ()



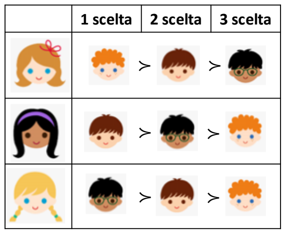
	1 scelta	2 scelta	3 scelta
	$\succ$	$\succ$	
	$\succ$	$\succ$	
	$\succ$	$\succ$	

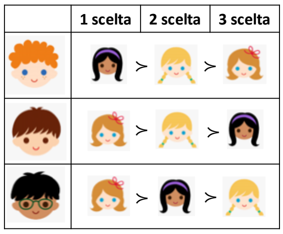


	1 scelta	2 scelta	3 scelta
	$\succ$	$\succ$	
	$\succ$	$\succ$	
	$\succ$	$\succ$	

Il problema del matrimonio

Preferenze

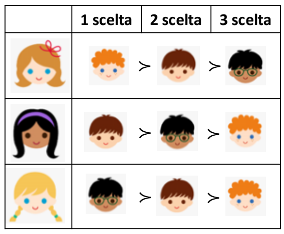


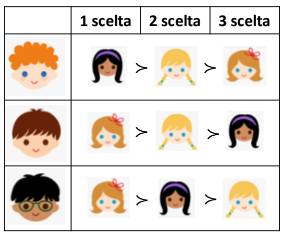


Il problema del matrimonio

Quale tra questi due matching proporreste?

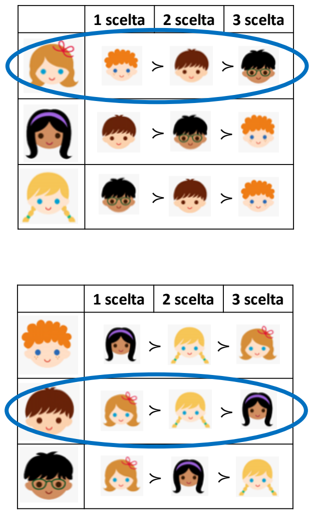
Preferenze



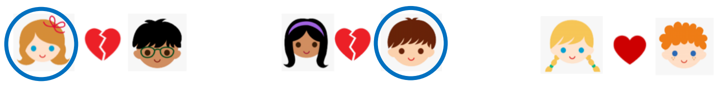


Il problema del matrimonio

Preferenze



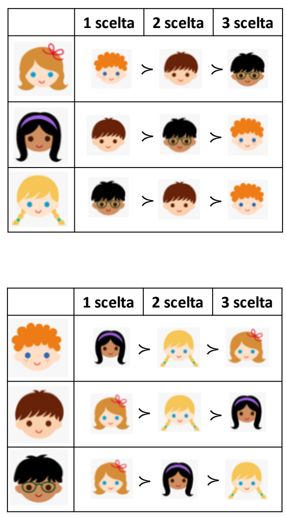
Quale tra questi due matching proporreste?



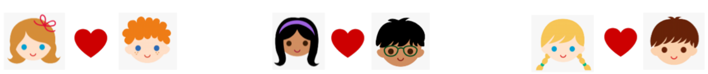
Il primo non è stabile, perché qualche coppia obietta.

Il problema del matrimonio

Preferenze



Quale tra questi due matching proporreste?



Il secondo è stabile

Matching stabili

Una coppia ammissibile (W, m) obbietta al matching $\boldsymbol{\mathcal{L}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{A}}$ se m e w preferiscono entrambi stare insieme piuttosto che stare con i partner a cui sono abbinati nel matching $\boldsymbol{\mathcal{L}}$.

Definizione

Un matching ammissibile $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ si dice **stabile** se non c'è nessuna coppia che obbietta.

Matching stabili

Una coppia ammissibile (W, m) obbietta al matching $\boldsymbol{\mathcal{L}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{A}}$ se m e w preferiscono entrambi stare insieme piuttosto che stare con i partner a cui sono abbinati nel matching $\boldsymbol{\mathcal{L}}$.

Definizione

Un matching ammissibile $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ si dice **stabile** se non c'è nessuna coppia che obbietta.

Consideriamo il matching $\mathcal{I} = \{(m, Z), (b, W), \dots\}$. Se vale

$$m \succ_W b \qquad \text{e} \qquad W \succ_m Z$$

allora il matching $\mathcal{I}$ non è stabile, perché la coppia (W, m) può migliorare la sua situazione.

Matching stabili

Una coppia ammissibile (W, m) obbietta al matching $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}$ se m e W preferiscono entrambi stare insieme piuttosto che stare con i partner a cui sono abbinati nel matching $\mathcal{L}$.

Definizione

Un matching ammissibile $\mathcal{L}$ si dice **stabile** se non c'è nessuna coppia che obbietta.

Consideriamo il matching $\mathcal{I} = \{(m, Z), (b, W), \ldots\}$. Se vale

$$m \succ_W b \quad \text{e} \quad W \succ_m Z$$

allora il matching $\mathcal{I}$ non è stabile, perché la coppia (W, m) può migliorare la sua situazione.

Esistenza di soluzioni stabili

Quando esistono soluzioni stabili?

Come si possono trovare?

Esistenza di soluzioni stabili

Quando esistono soluzioni stabili?

Come si possono trovare?

Teorema di Gale e Shapley

Ogni problema di matching ammette una soluzione stabile.

La dimostrazione è costruttiva: c'è un algoritmo che permette di trovare una soluzione stabile ad ogni problema.

Algoritmo "donne in visita"

Giorno 1: Ogni donna si reca a visitare l'uomo in cima al suo elenco di preferenze.

- Se tutte gli uomini ricevono la visita di una sola donna, l'algoritmo si conclude.
- Se un uomo riceve più di una visita, sceglie la donna che preferisce tra le sue attuali pretendenti
- Le donne che sono state rifiutate tornano a casa e gli uomini che non hanno ricevuto nessuna visita aspettano.

Giorno 2: Ogni donna rifiutata il primo giorno cancella dalla sua lista l'uomo che l'ha rifiutata. Si ripete la stessa procedura del primo giorno, le donne in visita alla loro prima scelta (aggiornata) e gli uomini che scelgono.

…

Giorno k: Le donne che non sono ancora accoppiate visitano il primo uomo nel loro elenco di preferenze che ancora non hanno visitato.

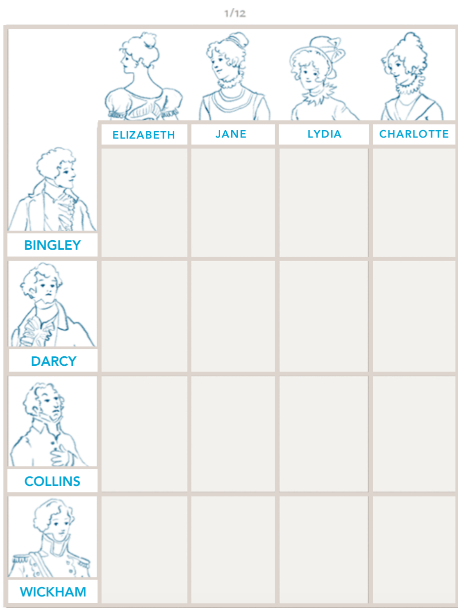
- Se tutti gli uomini ricevono la visita di una sola donna, l'algoritmo si conclude.
- Se un uomo riceve più di una visita, sceglie la donna che preferisce tra le sue attuali pretendenti
- Le donne che sono state rifiutate tornano a casa e gli uomini che non hanno ricevuto nessuna visita aspettano.

Preferenze

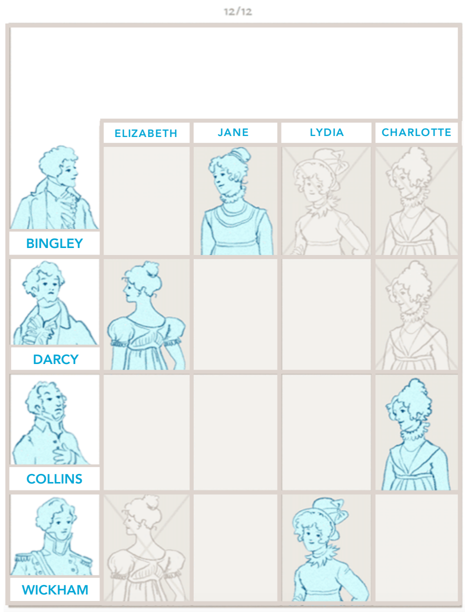
Assunzioni:

- I due gruppi hanno lo stesso numero di persone
- Ciascuno mette in ordine di preferenza le persone nell'altro gruppo (le preferenze sono strette e non contraddittorie)
- Stare da soli non è un'opzione

Come funziona



Come funziona



Algoritmo “donne in visita”: osservazioni

Osserviamo che:

1. Le donne scendono nelle loro preferenze;
2. Gli uomini invece salgono.
3. Se un uomo ha ricevuto visite a un certo passo, a partire dal passo successivo avrà sempre almeno una pretendente.

Algoritmo “donne in visita”: osservazioni

Inoltre:

1. L’algoritmo si arresta

   Le donne non possono essere rifiutate in eterno da un uomo, al più dovranno aspettare e scorrere tutto il loro elenco di preferenze prima di trovare un uomo rimasto single; visto che il numero di uomini e di donne è lo stesso, questo dovrà succedere prima o poi…

2. Ciò che si ottiene è una soluzione stabile

   Verifichiamo che al termine dell'algoritmo nessuna donna può trovarsi in una coppia che obbietta alla soluzione proposta.

Algoritmo “donne in visita”: osservazioni

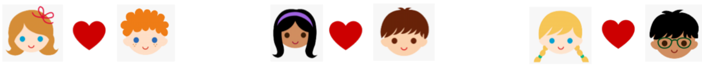
Verifichiamo che al termine dell'algoritmo nessuna donna può trovarsi in una coppia che obbietta alla soluzione proposta.

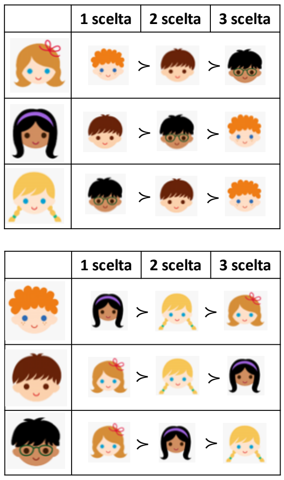
Consideriamo una generica donna W:

- Non è interessata a far parte di una coppia che obbietta con un uomo che non ha visitato (quello con cui è accoppiata per lei è meglio, visto che è il primo della sua classica che non la rifiuta);
- Non può far parte di una coppia che obbietta con un uomo che ha visitato (sarà stata rifiutata in favore di un'altra donna, che quindi per lui sta più in alto in classica; siccome nei giorni successivi l'uomo o rimane con la stessa donna o passa con un'altra ancora più alta in classica, non sarà interessato a riprendere una donna già rifiutata.

Algoritmo "donne in visita": soluzione

Preferenze





- L'algoritmo termina il primo giorno
- Le donne si recano tutte da un uomo differente, e quindi finisce subito
- Le preferenze degli uomini non hanno nessun peso

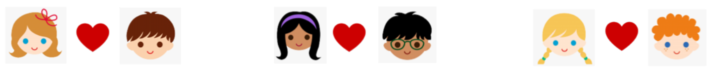
Un problema cruciale

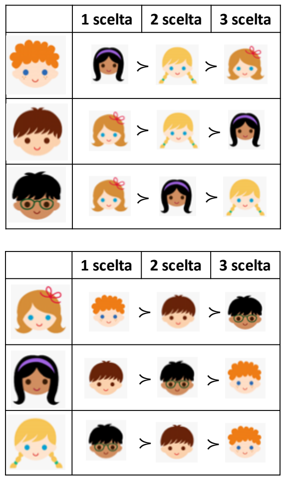
Perché abbiamo scelto l'algoritmo delle donne in visita? Non si poteva mandare gli uomini in visita?

Ovviamente si!

Algoritmo “uomini in visita”: soluzione

Preferenze

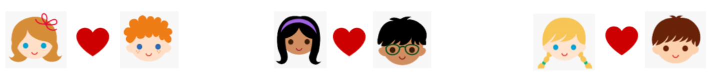


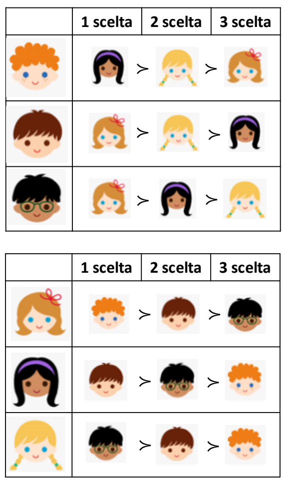


- Come si vede, abbiamo un secondo matching stabile, diverso dal precedente

Un terzo matching stabile

Preferenze





Più matching stabili

- Il fatto di avere esistenza, ma non unicità, pone qualche problema.
- Certamente crea una situazione complicata, perché gli agenti possono avere preferenze diverse riguardo alle soluzioni proposte, e allora è importante capire se una soluzione favorisce un agente e un'altra un agente diverso.
- In questo caso, possiamo dare un risultato interessante.

Più matching stabili

Teorema

Tra tutte le possibili soluzioni stabili ad un problema di matching, quella ottenuta applicando l'algoritmo di Gale-Shapley è la migliore per l'insieme dei giocatori che ha il ruolo di recarsi in visita agli elementi dell'altro insieme.

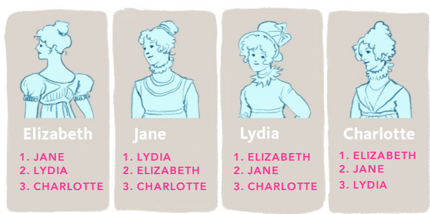
- L'algoritmo "donne in visita" produce il matching stabile preferibile per le donne rispetto a qualsiasi altro matching stabile.
- In altre parole ogni donna, se mandata in visita, si troverà alla fine con l'uomo che preferisce, tra tutti quelli che potrebbero essere accoppiati a lei in un matching stabile.
- Vale il viceversa per il matching ottenuto con l'algoritmo "uomini in visita".

Varianti

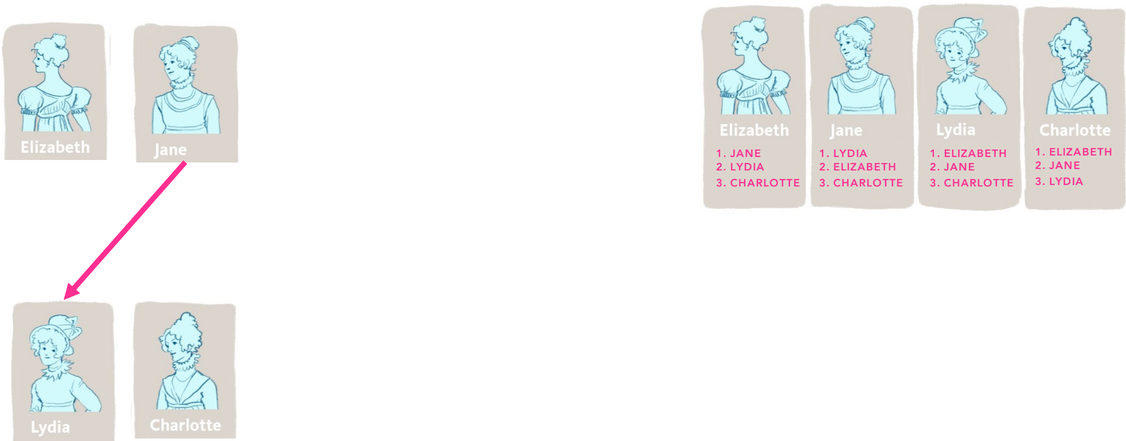
Quali altri elementi dobbiamo aggiungere e prendere in considerazione se vogliamo applicare questo algoritmo a situazioni reali?

- Cosa succede se il numero di uomini e di donne e diverso?
- È possibile che qualcuno voglia sposarsi ma non ad ogni costo?
- Si possono avere soluzioni per cui ad un elemento sono associati più elementi?
- Cosa succede se ho un solo insieme? In questo caso non possiamo garantire l'esistenza di un matching stabile.

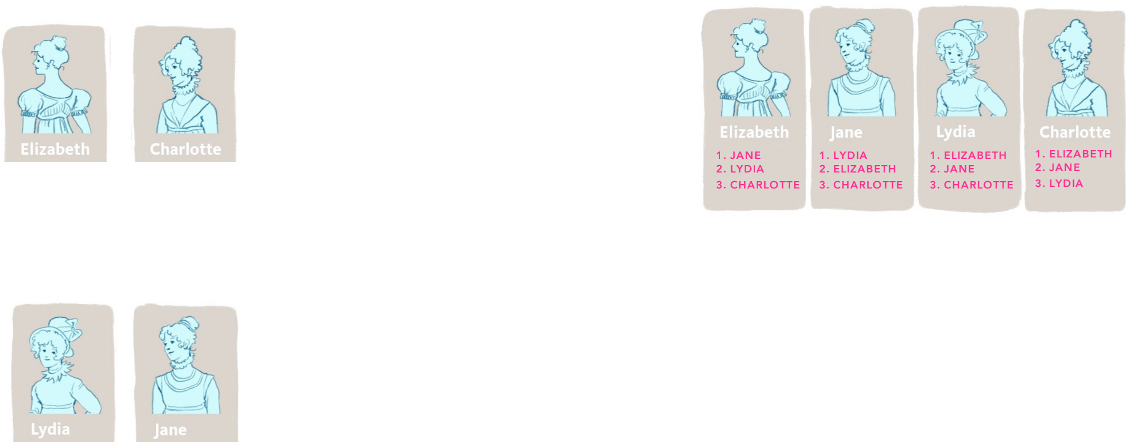
Le stanze



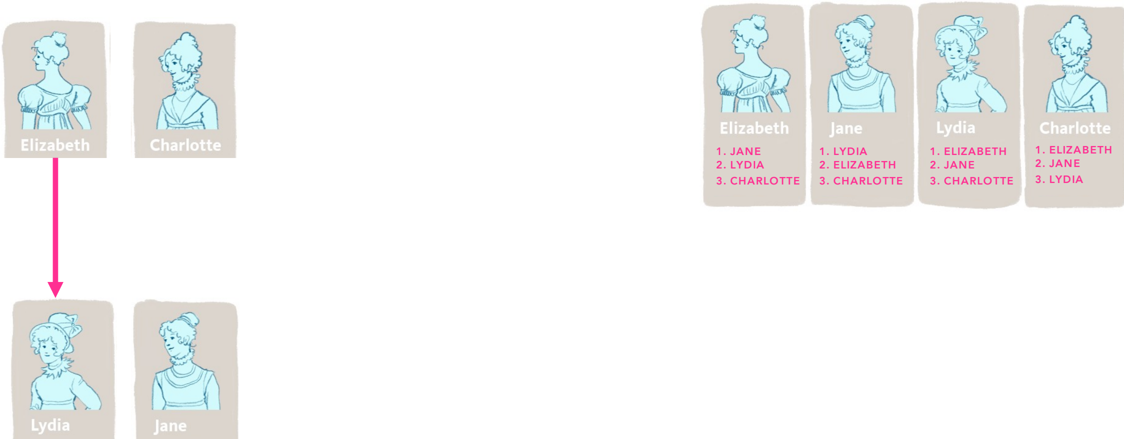
Le stanze



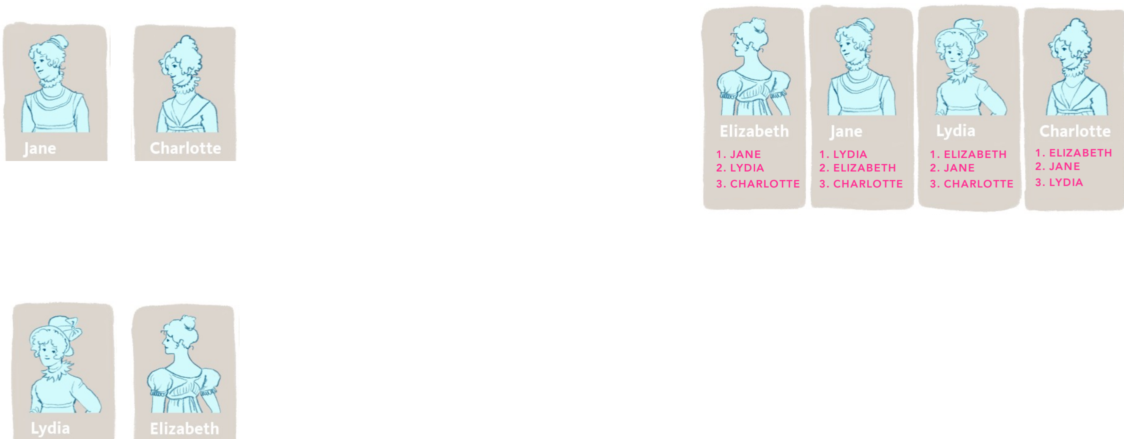
Le stanze



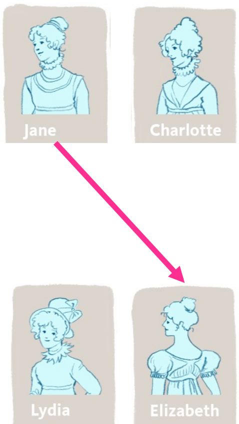
Le stanze

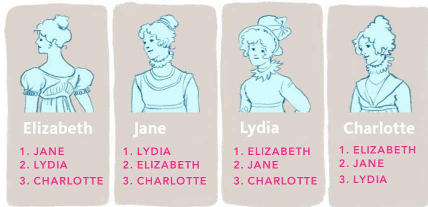


Le stanze

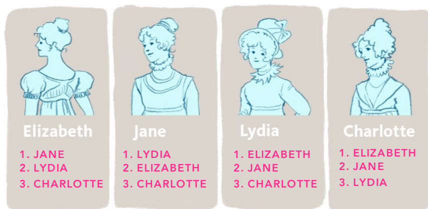


Le stanze





Le stanze



Varianti: matrimoni poligami

Tre studenti: A,B,C vogliono iscriversi a Harvard dove ci sono due posti disponibili o Yale che ha un solo posto disponibile.

Varianti: matrimoni poligami

Tre studenti: A,B,C vogliono iscriversi a Harvard dove ci sono due posti disponibili o Yale che ha un solo posto disponibile.

Le preferenze degli studenti sono:

$$A : Y > H \qquad B : Y > H \qquad C : H > Y$$

mentre quelle delle università:

$$H : A > B > C \qquad Y : C > B > A$$

Varianti: matrimoni poligami

Tre studenti: A,B,C vogliono iscriversi a Harvard dove ci sono due posti disponibili o Yale che ha un solo posto disponibile.

Le preferenze degli studenti sono:

$$A: Y > H \qquad B: Y > H \qquad C: H > Y$$

mentre quelle delle università:

$$H: A > B > C \qquad Y: C > B > A$$

Quale soluzione troviamo applicando l'algoritmo con gli studenti che visitano? E l'algoritmo con le università che visitano?

Un problema cruciale

È possibile che le persone mentano riguardo alle loro preferenze?

Strategy-proofness

Il gruppo che visita non ha incentivo a mentire: la soluzione a cui si arriva è la migliore possibile per loro!

Il gruppo che riceve le visite può manipolare il gioco: in alcuni casi, mentendo sulle loro preferenze reali i giocatori possono ottenere una soluzione che preferiscono rispetto a quella a cui si arriverebbe se non mentissero.

Esempio

Ettore: Elena $\succ$ Andromaca $\succ$ Lavinia
Enea: Elena $\succ$ Lavinia $\succ$ Andromaca
Paride: Andromaca $\succ$ Elena $\succ$ Lavinia

Elena: Paride $\succ$ Ettore $\succ$ Enea
Andromaca: Ettore $\succ$ Paride $\succ$ Enea
Lavinia: Enea $\succ$ Ettore $\succ$ Paride

Immaginiamo che gli uomini visitino le donne. Allora si ottiene

Esempio

Ettore: Elena $\succ$ Andromaca $\succ$ Lavinia
Enea: Elena $\succ$ Lavinia $\succ$ Andromaca
Paride: Andromaca $\succ$ Elena $\succ$ Lavinia

Elena: Paride $\succ$ Ettore $\succ$ Enea
Andromaca: Ettore $\succ$ Paride $\succ$ Enea
Lavinia: Enea $\succ$ Ettore $\succ$ Paride

Immaginiamo che gli uomini visitino le donne. Allora si ottiene

(Ettore, Elena), (Enea, Lavinia), (Paride, Andromaca)

Esempio

Ettore: Elena $\succ$ Andromaca $\succ$ Lavinia
Enea: Elena $\succ$ Lavinia $\succ$ Andromaca
Paride: Andromaca $\succ$ Elena $\succ$ Lavinia

Elena: Paride $\succ$ Ettore $\succ$ Enea
Andromaca: Ettore $\succ$ Paride $\succ$ Enea
Lavinia: Enea $\succ$ Ettore $\succ$ Paride

Immaginiamo che gli uomini visitino le donne. Allora si ottiene

(Ettore, Elena), (Enea, Lavinia), (Paride, Andromaca)

Le donne possono mentire per migliorare la loro situazione? Sì. Se Elena mente dicendo che il suo ordine di preferenze è "Paride $\succ$ Enea $\succ$ Ettore", allora la soluzione diventa:

Esempio

Ettore: Elena $\succ$ Andromaca $\succ$ Lavinia
Enea: Elena $\succ$ Lavinia $\succ$ Andromaca
Paride: Andromaca $\succ$ Elena $\succ$ Lavinia

Elena: Paride $\succ$ Ettore $\succ$ Enea
Andromaca: Ettore $\succ$ Paride $\succ$ Enea
Lavinia: Enea $\succ$ Ettore $\succ$ Paride

Immaginiamo che gli uomini visitino le donne. Allora si ottiene

(Ettore, Elena), (Enea, Lavinia), (Paride, Andromaca)

Le donne possono mentire per migliorare la loro situazione? Sì. Se Elena mente dicendo che il suo ordine di preferenze è "Paride $\succ$ Enea $\succ$ Ettore", allora la soluzione diventa:

(Ettore, Andromaca), (Enea, Lavinia), (Paride, Elena)

Esercizio

Quattro ragazzi (Alberto, Bernardo, Carlo e Davide) devono dividersi in due camere con due letti ciascuna. Date le loro preferenze:

Alberto: B $\succ$ C $\succ$ D;
Bernardo: C $\succ$ A $\succ$ D;
Carlo: A $\succ$ B $\succ$ D;
Davide: A $\succ$ B $\succ$ C.

dire se esiste un matching stabile.

Le preferenze di quale giocatore sono irrilevanti?

Esercizio

Consideriamo il seguente problema di matching, con

$\mathcal{W}$ = {Catwoman, Wonderwoman}
$\mathcal{M}$ = {Superman, Batman, Flash}

Supponiamo che Catwoman preferisca Batman a Superman e Superman a Flash, mentre Wonderwoman preferisca Superman a Flash e Flash a Batman.

1. Se le donne visitano gli uomini, quale è un insieme stabile?
2. Determinare le preferenze degli uomini (considerando anche l'opzione: "preferisco stare da solo") in modo che ci sia un altro insieme stabile.

Applicazioni

- Il National Residency Matching Program (NRMP) una organizzazione degli Stati Uniti fondata nel 1952 per abbinare i laureati in medicina ai programmi di specializzazione negli ospedali
- Negli anni '90 il NRMP era in difficoltà perché sia i medici che gli ospedali erano insoddisfatti
- Il lavoro di Gale and Shapley è stato usato per migliorare L'algoritmo usato dal NRMP in modo da produrre matching più stabili.
- (l'algoritmo è un po' diverso dall'originale, dal momento che gli ospedali possono accettare vari specializzandi)

Applicazioni

- Prima del 2003, a NYC non si usava l'algoritmo di Gale-Shapley per assegnare gli studenti alle scuole
- Molti disagi
- Circa 30.000 studenti ogni anno erano assegnati a scuole che non erano nella loro lista di preferenza
- Il nuovo algoritmo, utilizzando Gale e Shapley, ha ridotto questo numero del 90%.

Altre applicazioni

- Stati e rifugiati
- Case popolari e inquilini
- Donazioni (cibo) a punti di raccolta
- Bambini e genitori adottivi
- Trapianti di rene

Perché ci serve la matematica per i matching?

2004 – Ammissioni scolastiche a Boston : 17.000 studenti / 140 scuole superiori
2005 – Ammissioni scolastiche a New York : 90.000 studenti / 530 scuole superiori

Programmi per il trapianto di rene: migliaia di pazienti in lista d'attesa!