Nobel 2022 per l'economia

- Philip H. Dybvig
- Douglas Diamond
- Ben Bernanke

Le loro ricerche hanno chiarito i motivi per cui esistono le banche, il modo in cui è possibile renderle neno vulnerabili nel corso delle crisi finanziarie e quanto i loro crolli influiscano negativamente sulle stesse crisi.

Modello supersemplificato

- Due investitori investono ciascuno 10 e, se aspettano la scadenza, avranno 11;
- Per disinvestire prima del periodo la banca paga il 25% della somma disinvestita;
- Segli investitori decidono entrambi di disinvestire hanno $7,5$ ciascuno;
- Se gli investitori invece aspettano la scadenza avranno 11 ciascuno.

- La banca rende i soldi finche ne ha.
- Se un solo investitore decide di disinvestire prima della scadenza , avrà i suoi 10 euro, che la banca deve disinvestire. Quanto? Una quantità x tale che $20 \cdot \frac{75}{100}x = 10$ da cui $x = \frac{40}{3}$.
- Alla fine del periodo la banca puo rendere all'altro investitore $(20 - x) \cdot 1,1 = \frac{20}{3} \cdot 1,1 = \frac{22}{3}$ che e minore di $7,5$

I \ II	R	NR
R	(7,5, 7,5)	$(10, \frac{22}{3})$
NR	$(\frac{22}{3}, 10)$	(11, 11)

Questo gioco ha due equilibri di Nash: uno pareto efficiente (NR, NR) e l'altro inefficiente: (R, R) che corrisponde al panico bancario

Considerazioni sugli equilibri evolutivi

- Un gioco non cooperativo a due giocatori in forma strategica (X, X, f, g) si dice simmetrico se $g(x, y) = f(y, x)$.
- In un gioco simmetrico gli spazi di strategie dei due giocatori sono gli stessi.
- Definizione (intuitiva) di strategia evolutivamente stabile: Sia (X, X, f, g) un gioco simmetrico. Una strategia b^* si dice evolutivamente stabile se, quando in una popolazione di animali che adottano tutti la strategia b^* avviene una qualunque mutazione e questa mutazione fa sì che una piccola percentuale della popolazione adotti una strategia b diversa da b^*, allora l'utilità attesa di un mutante è minore di quella di un non mutante.

Considerazioni sugli equilibri evolutivi

- Sia ε la probabilità (frequenza relativa) del mutante. L'utilità attesa del non mutante b^* è
  $u(b^*) = (1-\varepsilon)f(b^*, b^*) + \varepsilon f(b^*, b)$
  mentre l'utilità attesa del mutante b è
  $u(b) = (1-\varepsilon)f(b, b^*) + \varepsilon f(b, b)$
- La strategia b^* è evolutivamente stabile se e solo se $u(b) < u(b^*)$ per ogni strategia b e per ogni numero ε sufficientemente piccolo.

Considerazioni sugli equilibri evolutivi

Dunque deve esistere un numero δ tale che per ogni ε nell'intervallo $[0, \delta]$ si abbia:

(1) $u(b) = (1-\varepsilon)f(b, b^*) + \varepsilon f(b, b) < u(b^*) = (1-\varepsilon)f(b^*, b^*) + \varepsilon f(b,^*, b)$

da cui, passando al limite per ε tendente a 0, si ha

a) $f(b, b^*) \leq f(b^*, b^*)$ per ogni b

che è la definizione di equilibrio di Nash.

Considerazioni sugli equilibri evolutivi

Questo non basta perchè se per qualche b vale

$f(b, b^*) = f(b^*, b^*)$

la condizione (1) diventa

$\varepsilon f(b, b) < \varepsilon f(b^*, b)$

e quindi

b) $f(b, b) < f(b^*, b)$

Considerazioni sugli equilibri evolutivi

- DEFINIZIONE formale di strategia evolutivamente stabile. Sia (X, X, f, g) un gioco simmetrico. Una strategia b^* si dice evolutivamente stabile se (b^*, b^*) è un equilibrio di Nash e se inoltre per ogni strategia $b \neq b^*$ tale che $f(b, b^*) = f(b^*, b^*)$ allora $f(b, b) < f(b^*, b)$.
- Sia (X, X, f, g) un gioco simmetrico. Un equilibrio di Nash formato da una coppia di strategie (b^*, b^*) tale che b^* è evolutivamente stabile, si dice equilibrio evolutivo.
- Un equilibrio evolutivo si ottiene per una coppia di strategie uguali.

Il gioco falchi-colombe

Supponiamo che in una popolazione di animali della stessa specie si verifichino delle contese tra due animali per la conquista della preda e poniamo uguale a 1 l'utilità che un animale ottiene conquistando una preda. Supponiamo poi che l'animale abbia a disposizione solo due strategie: una aggressiva Falco e una non aggressiva Colomba. Se entrambi gli animali si comportano da C si dividono la preda e ottengono $\frac{1}{2}$ ciascuno. Se uno si comporta da C e l'altro da F, F prende 1 e C 0, mentre se entrambi si comportano da F prendono ciascuno $\frac{1}{2} - c$ essendo c il costo del combattimento. In tabella:

Il gioco falchi-colombe

I \ II	F	C
F	(1/2-c, 1/2-c)	(1, 0)
C	(0, 1)	(1/2, 1/2)

Cerchiamo gli equilibri di Nash in strategie pure:

- se $\frac{1}{2} - c > 0$ cioè $c < \frac{1}{2}$, la strategia F è evolutivamente stabile e (F, F) è un equilibrio di Nash evolutivo ma inefficiente.
- se $\frac{1}{2} - c = 0$ cioè $c = \frac{1}{2}$, la strategia F è evolutivamente stabile e (F, F) è un equilibrio di Nash evolutivo, ma ci sono altri due equilibri di Nash (F, C) e (C, F) che non sono evolutivi. La strategia F è l'unica evolutivamente stabile.
- se $\frac{1}{2} - c < 0$ cioè $c > \frac{1}{2}$, il gioco ha due equilibri (F, C) e (C, F) che non sono evolutivi.

Strategie miste

- Per entrambi i giocatori una strategia mista è un numero p compreso tra 0 e 1 che rappresenta la probabilità che egli giochi la strategia F mentre $1-p$ rappresenta la probabilità che egli giochi la strategia C. Indichiamo con p la strategia del primo giocatore e con q la strategia del secondo. Calcoliamo le utilità dei due giocatori:
  $f(p,q) = g(q,p) = (\frac{1}{2} - c)pq + p(1-q) + \frac{1}{2}(1-p)(1-q) = (p-q+1)/2 - cpq$

- Se $c < \frac{1}{2}$, l'intersezione delle due curve di miglior risposta dà l'unico equilibrio di Nash $(1,1)$ che corrisponde a giocare sempre la strategia F ed è l'equilibrio di Nash in strategie pure già noto e che è anche evolutivo.
- se $c = \frac{1}{2}$. In questo caso $(1,1)$ e tutti i punti del tipo $(p,1)$ e $(1,q)$ con p e q qualsiasi sono equilibri di Nash, ma solo $(1,1)$ è evolutivo.
- se $c > \frac{1}{2}$ si trovano tre equilibri di Nash $(0,1)$, $(1,0)$ e $(\frac{1}{2c}, \frac{1}{2c})$ I primi due equilibri non sono evolutivi perchè non sono simmetrici , mentre il terzo è evolutivo. La strategia $\frac{1}{2c}$ è l'unica strategia evolutivamente stabile. Quindi in questo caso ci possiamo aspettare, come risultato della selezione naturale, non una popolazione di tutti F o di tutte C, ma una popolazione di individui che adottano la strategia mista $p = \frac{1}{2c}$.

- La strategia di miglior risposta a q è quella che realizza $max_p f(p,q) = max_p(-cq + \frac{1}{2})p - \frac{q}{2} + \frac{1}{2}$,
- La strategia di miglior risposta a p è quella che realizza $max_q g(p,q) = max_q f(q,p) = max_q(-cp + \frac{1}{2})q - \frac{p}{2} + \frac{1}{2}$.
- Queste due multifunzioni si intersecano nei punti $(0,1)$, $(1,0)$ e $(\frac{1}{2c}, \frac{1}{2c})$.

- $(\frac{1}{2c}, \frac{1}{2c})$ è evolutivo. $\frac{1}{2c}$ in questo caso è effettivamente una probabilità in quanto $c > \frac{1}{2}$ e quindi $0 < \frac{1}{2c} < 1$.
- $f(\frac{1}{2c}, \frac{1}{2c}) = \frac{2c-1}{4c}$
- $f(p, \frac{1}{2c}) = \frac{2c-1}{4c}$ per ogni valore di p.

- Occorre che sia verificata la condizione
  $u(p,p) < u(\frac{1}{2c},p)$
- $u(p,p) = \frac{1-2cp^2}{2}$,
  $u(\frac{1}{2c},p) = \frac{1-4cp+2c}{4c}$
  si ottiene che $u(p,p) < u(\frac{1}{2c},p)$ se e solo se $(2cp-1)^2 > 0$ che è equivalente a $p \neq \frac{1}{2c}$
  Dunque in questo caso l'equilibrio è evolutivo.

Il parametro c che determina il modello non è altro che il rapporto tra il costo della lotta e il valore della preda e quindi dipende dall'ambiente e può variare se variano le condizioni ambientali. In particolare se il numero delle prede diminuisce, il valore di una singola preda aumenta e quindi c diminuisce (noi abbiamo infatti per convenzione posto uguale a 1 in ogni caso il valore della preda). Sembrerebbe che quindi diminuendo il numero delle prede debba aumentare la probabilità che gli animali si comportino da F, ma questo non è possibile perchè noi supponiamo che gli animali non possano cambiare volontariamente i loro comportamenti , perchè questi sono determinati geneticamente. Bisogna aspettare che avvenga per caso una mutazione, poi l'ambiente eserciterà la sua influenza sui mutanti.

Esercizio

I \ II	S	N
S	(1, 1)	(0,2)
N	(2,0)	(-3, -3)

- Trovare gli equilibri di Nash in strategie pure e miste
- È un gioco evolutivo?
- Ha equilibri evolutivi?

Ci sono due equilibri di Nash in strategie pure che sono (S, N) e (N, S) che non sono evolutivi perch é non sono simmetrici. Calcoliamo gli equilibri in strategie miste:

- Si ha $u_1(p, q) = pq + 2q(1-p) - 3(1-p)(1-q) = (-4q+3)p - 3 + 3q$ il cui massimo si ha sempre per $p = 1$ quando $q < \frac{3}{4}$,per$p = 0$ quando $q > \frac{3}{4}$ per ogni p quando $q = \frac{3}{4}$.
- Si ha $u_2(p, q) = pq + 2p(1-q) - 3(1-p)(1-q) = (-4p+3)q - 3 + 3p$ il cui massimo si ha per $q = 1$ quando $p > \frac{3}{4}$ e per $q = 0$ quando $q < \frac{3}{4}$ e per ogni q quando $q = \frac{3}{4}$.
- L'intersezione delle due curve di miglior risposta si ha per $p = 0$ e $q = 1$ e dunque si riottiene l'equilibrio in stratege pure (N, S) e per $p = 1$ e $q = 0$ e si riottiene l'equilibrio in stratege pure (S, N) e per $p = \frac{3}{4}$ e $q = \frac{3}{4}$ che è simmetrico e quindi potrebbe essere evolutivo.

Controlliamo se è evolutivo: Abbiamo

- $u_1(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}) = \frac{9}{16} + \frac{6}{16} - \frac{3}{16} = \frac{3}{4}$ mentre
- $u_1(\frac{3}{4}, p) = \frac{3}{4}p + \frac{2}{4}p - \frac{3}{4}(1 - p) = \frac{8}{4}p - \frac{3}{4}$
- $u_1(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}) = u_1(\frac{3}{4}, p)$ se e solo se $p = \frac{3}{4}$ e dunque l'equilibrio è evolutivo.

Esercizio

II / I	P	D
P	(-2, 2)	(3, -3)
D	(3, -3)	(-4,4)

Trovare gli equilibri di Nash in strategie pure e miste. È un gioco evolutivo? Un gioco a somma zero può essere un gioco evolutivo?