Giochi cooperativi: il nucleo

Monica Salvioli

30 Novembre 2022

Imputazioni

Consideriamo un gioco a utilità trasferibile con n giocatori, (N, v):

- Un elemento $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ si chiama allocazione.
- Se una allocazione x verifica

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$$

  allora x viene detta **pre-imputazione**.
- Una pre-imputazione che soddisfa anche la proprietà

$$x_i \geq v(\{i\}) \quad \forall i \in N$$

  viene detta **imputazione**.

Il nucleo

- La prima condizione della definizione di imputazione impone che non vengano sollevate obiezioni da parte della grande coalizione, in quanto tutto viene distribuito
- La seconda condizione della definizione di imputazione impone che non vengano sollevate obiezioni da parte dei singoli.
- Viene naturale allora pensare di tenere conto anche di quanto possono fare tutte le coalizioni. È una sorta di 'razionalità intermedia'.

Il nucleo

Definizione: Si chiama nucleo del gioco (N, v) l'insieme di tutte le allocazioni che soddisfano le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \ \ \forall S \subset N \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = v(N) \end{cases}$$

cioè sono verificate:

- razionalità individuale
- razionalità delle coalizioni
- efficienza

Il nucleo nel gioco del duetto

100

150

400

$(x, 400 - x)$ con $100 \leq x \leq 250$

Il nucleo nel gioco dei guanti

DDS

$N = \{1,2,3\}$

$v(\emptyset) = v(\{i\}) = v(\{1,2\}) = 0$

$v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = v(N) = 1$

Il nucleo nel gioco dei guanti

$v(\emptyset) = v(1) = v(2) = v(3) = v(1,2) = 0$

$v(1,3) = v(2,3) = v(N) = 1$

(x_1, x_2, x_3)

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 0 \quad x_1 + x_3 \geq 1 \quad x_2 + x_3 \geq 1 \\ \cancel{x_1} + \cancel{x_2} + x_3 = 1 \end{cases}$$

$x_1 = 0$

$x_2 = 0$

$x_3 = 1$

$(0, 0, 1)$

Il nucleo nel gioco di maggioranza

Ci sono tre persone che devono prendere una decisione a maggioranza.

$N = \{1,2,3\}$

$v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$

$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = v(\{1,2,3\}) = 1$

Trovare il nucleo.

Il nucleo nel gioco di maggioranza

Esercizio

$N = \{1,2,3\}$

$v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$

$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = 1$

$v(\{2,3\}) = 0$

$v(N) = 2$

Trovare il nucleo.

Esercizio

$N = \{1,2,3\}$

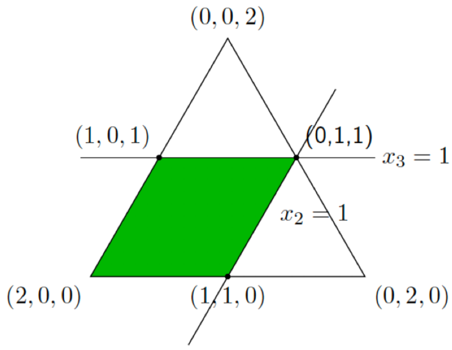
$v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$

$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = 1$

$v(\{2,3\}) = 0$

$v(N) = 2$

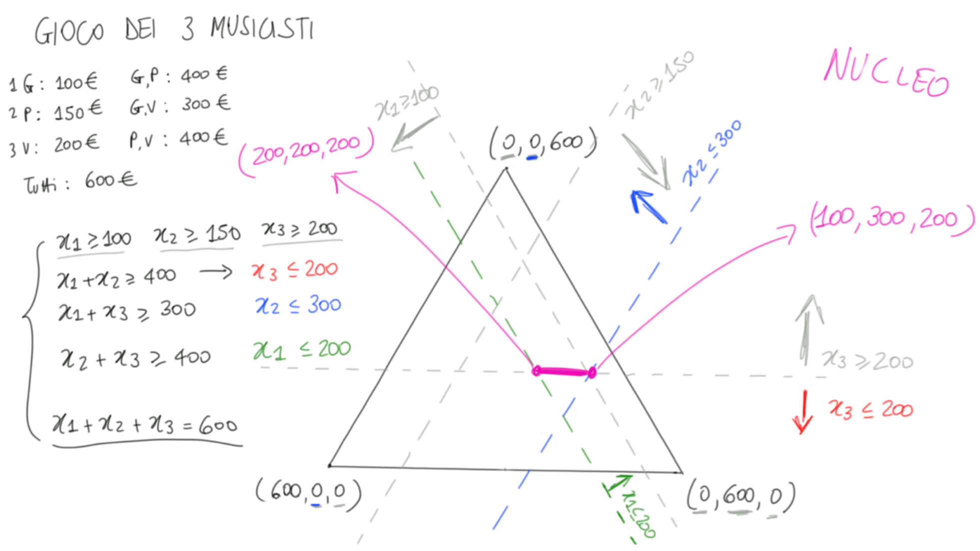
Trovare il nucleo.



Il nucleo per il gioco dei tre musicisti

	100		400		
	150		300		600
	200		400		

Esercizio: Calcolare il nucleo per il gioco dei tre musicisti



Giochi semplici

- Introduciamo una classe particolare di giochi, in cui possiamo individuare coalizioni **perdenti** e coalizioni **vincenti.**

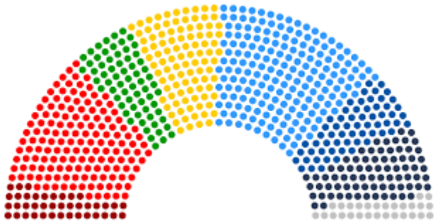
Definizione: Un gioco (N, v) si dice **semplice** se verifica le seguenti proprietà:

1. la funzione caratteristica assume solo i valori 0 e 1, cioè $v\colon P(N) \to \{0,1\}$
2. $v(N) = 1$
3. $A \subset B \Rightarrow v(A) \leq v(B)$

Giochi semplici: interpretazione

- In questi giochi non ci interessa rappresentare l'utilità della coalizione, ma la sua forza. Per questo motivo la funzione caratteristica assume solo i valori 0 e 1:
  - $v(A) = 0$ significa che la coalizione A e perdente o non ha la forza di imporre decisioni
  - $v(A) = 1$ significa che la coalizione A è vincente e ha potere decisionale.
- La seconda condizione dice che la coalizione formata da tutti i giocatori è vincente.
- La terza condizione dice che se si aggiungiamo giocatori a una coalizione vincente essa rimane vincente, e se una coalizione è perdente non può diventare vincente se togliamo qualche giocatore.

Giochi semplici: applicazioni



Il consiglio di sicurezza dell’Onu

Nel consiglio di sicurezza dell'Onu siedono 5 membri permanenti e 10 a rotazione. Perché una risoluzione sia approvata, il vecchio sistema prevedeva che dovesse avere il voto favorevole di tutti i membri permanenti e di almeno 4 membri a rotazione.

Matematicamente, $S \subset N$ è vincente se:

- $\{1, \dots, 5\} \subseteq S$
- $|S| \geq 9$

- Osserviamo che i membri permanenti sono tutti giocatori di veto.

Determinare il nucleo.

Giocatori di veto

Definizione: In un gioco (N, v) un giocatore $i \in N$ è detto **giocatore di veto** se $v(A) = 0$ per ogni coalizione A tale che $i \notin A$.

In un gioco semplice può esserci un solo giocatore di veto, nessun giocatore di veto o anche più giocatori di veto, come nel caso dell’Onu.

Abbiamo introdotto i giocatori di veto perché nel caso dei giochi semplici il nucleo ha una proprietà interessante.

Teorema: In un gioco semplice il nucleo è diverso dal vuoto se e solo se c’è almeno un giocatore di veto.

Per la prossima volta

- Determinare il nucleo nel gioco del taxi
- Determinare il nucleo nel gioco del consiglio di sicurezza dell'ONU

Il nucleo: problema

- Il concetto di nucleo è interessante ma non sempre propone delle soluzioni. E anche quando ne propone alcune di queste sembrano "ingiuste".
- Per esempio, nel gioco dei guanti viene assegnato 0 a chi possiede un guanto destro. È vero che i guanti destri sono sovrabbondanti, ma il giocatore che possiede un guanto sinistro ha comunque bisogno di un guanto destro, e il nucleo non tiene conto di questo.
- Non è una soluzione 'costruttiva', ma un modo per escludere quelle allocazioni che non verrebbero accettate dai singoli giocatori e dalle coalizioni
- Quando propone più soluzioni non sappiamo quale scegliere: cerchiamo un concetto di soluzione che associ ad ogni gioco un unico valore.
- Rischiamo di perdere qualche altra proprietà…