Giochi cooperativi: il valore Shapley

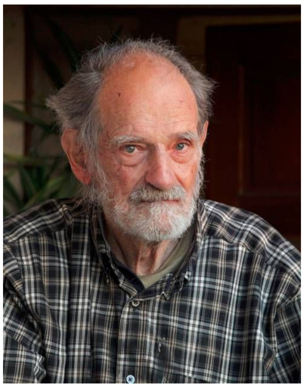
Monica Salvioli

14 Dicembre 2022

Il nucleo: problema

- Il concetto di nucleo è interessante ma non sempre propone delle soluzioni. E anche quando ne propone alcune di queste sembrano "ingiuste".
- Per esempio, nel gioco dei guanti viene assegnato 0 a chi possiede un guanto destro. È vero che i guanti destri sono sovrabbondanti, ma il giocatore che possiede un guanto sinistro ha comunque bisogno di un guanto destro, e il nucleo non tiene conto di questo.
- Non è una soluzione 'costruttiva', ma un modo per escludere quelle allocazioni che non verrebbero accettate dai singoli giocatori e dalle coalizioni
- Quando propone più soluzioni non sappiamo quale scegliere: cerchiamo un concetto di soluzione che associ ad ogni gioco un unico valore.
- Rischiamo di perdere qualche altra proprietà…

Il valore Shapley

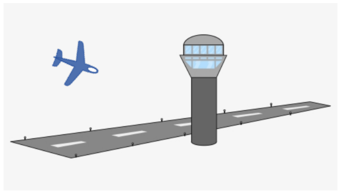


- Il valore Shapley deve il suo nome al matematico Lloyd Shapley, premio Nobel per l'Economia nel 2012.
- È il concetto di soluzione più famoso di tutta la teoria cooperativa, ma anche il più complesso.
- Partiamo da un esempio e poi passiamo alla formalizzazione.

La pista di atterraggio

Tre compagnie hanno bisogno di una nuova pista di atterraggio in città.
La prima compagnia ha bisogno solo di 1 km di pista, il cui costo di realizzazione è 6.000; la seconda compagnia ha bisogno di una pista lunga 2 km che costerebbe 10.000, mentre la terza vuole una pista di 3 km al costo di 13.000.
Decidono quindi di costruire un'unica pista lunga 3 km e di dividersi i costi.

Quale potrebbe essere la funzione caratteristica di questo gioco?



La pista di atterraggio: idea

- Anziché immaginare le compagnie impegnate a discutere su quanto ciascuna dovrebbe pagare per contribuire alla pista da 3km che può soddisfare tutte, immaginiamo che agiscano in modo indipendente:
- la prima compagnia si presenta per prima e chiede di poter costruire una pista da 1km, che paga 6000 euro;
- successivamente arriva la seconda compagnia che ha bisogno di un chilometro extra e paga 4000 euro;
- infine arriva la terza compagnia che mette la cifra rimanente per costruire l'ultimo chilometro di pista, cioè 3000 euro.

La pista di atterraggio: idea

- Questa soluzione appare ragionevole perché nessuna paga più di quanto pagherebbe da sola, ma risente troppo del fatto che l'ordine di arrivo delle compagnie è fissato in maniera del tutto arbitraria.
- Cosa succederebbe se le compagnie si presentassero in un ordine diverso?
- Supponiamo, per esempio, che la seconda compagnia arrivi per prima. Naturalmente, dovrebbe pagare il prezzo della pista di 2 km, cioè 10.000 euro;
- la terza compagnia, per atterrare, deve mettere i 3.000 euro rimanenti
- la prima, sia che arrivi subito dopo la seconda, sia che arrivi per ultima, non deve pagare nulla perché la pista di cui ha bisogno c'è già!

La pista di atterraggio: idea

	Ordine di arrivo					
Compagnie						
	6.000	6.000	0	0	0	0
	4.000	0	10.000	10.000	0	0
	3.000	7.000	3.000	3.000	13.000	13.000

La pista di atterraggio: soluzione

	Ordine di arrivo						Media
Compagnie							
	6.000	6.000	0	0	0	0	**2.000**
	4.000	0	10.000	10.000	0	0	**4.000**
	3.000	7.000	3.000	3.000	13.000	13.000	**7.000**

La pista di atterraggio: soluzione

	Ordine di arrivo						**Media**
Compagnie							
	6.000	6.000	0	0	0	0	**2.000**
	4.000	0	10.000	10.000	0	0	**4.000**
	3.000	7.000	3.000	3.000	13.000	13.000	**7.000**

La media è proprio il valore Shapley!

La pista di atterraggio: interpretazione

Anzitutto, è una soluzione efficiente, perché la somma delle assegnazioni è 13.000, cioè il prezzo della pista lunga 3 km. Inoltre, sembra piuttosto ragionevole:

- il primo chilometro serve a tutte e tre le compagnie. Il suo costo, 6.000, viene quindi ripartito equamente tra tutte e tre: ognuna paga 2.000;
- aggiungere un secondo chilometro costa 4.000. Dal momento che questo pezzo di pista non viene usato dalla prima compagnia, il suo costo viene ripartito in parti uguali tra la seconda e la terza;
- il costo del terzo chilometro viene sostenuto interamente dalla compagnia 3, che è la sola ad utilizzare questo pezzo di pista.

Formalizziamo

Consideriamo un giocatore i in un gioco a n giocatori: dato un certo ordine di arrivo, quanto deve pagare i?
Se chiamiamo S la coalizione dei giocatori che sono arrivati prima, i deve pagare la differenza tra il costo della pista che soddisfa tutti ($S \cup \{i\}$) e quella che soddisfa solamente la coalizione S.

Definizione: Il contributo marginale che il giocatore i porta alla coalizione $S \cup \{i\}$ è la quantità

$$v(S \cup \{i\}) - v(S)$$

Formalizziamo

- Il valore Shapley è una somma pesata dei contributi marginali di un giocatore. Quanto valgono questi pesi?
- Possiamo verificare (guardando la tabella) che per ogni i questo costo dipende da quanti sono i giocatori in S, ma non dipende dal loro ordine di arrivo, e non dipende nemmeno dall'ordine di arrivo dei giocatori che seguono i.

Formalizziamo

- Se indichiamo con s il numero di giocatori di S, ci sono esattamente $s!$ modi per ordinare tutti questi giocatori che arrivano prima del giocatore i e ci sono $(n - s - 1)!$ modi per ordinare i giocatori che arrivano dopo i.
- Quindi nella tabella il valore $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ si ripeterà esattamente $s!\,(n - s - 1)!$ volte. Dovendo poi fare una media, dobbiamo dividere per il numero di arrivi diversi possibili, che sono le permutazioni degli n giocatori, quindi $n!$
- Per concludere, dobbiamo considerare tutte le possibili coalizioni S.

Il valore Shapley

Definizione: Dato un gioco cooperativo (N, v) il **valore Shapley** di un giocatore i è dato da:

$$\sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{s!\,(n - s - 1)!}{n!} \left[v(S \cup \{i\}) - v(S) \right]$$

Vediamo quali proprietà Shapley ritiene ragionevoli…

Anonimità (o simmetria)

Quanto viene dato a un giocatore non dipende da chi è il giocatore, ma solamente da quanto il giocatore è in grado di ottenere da solo e con gli altri, cioè solo dalla loro situazione strategica

Anonimità (o simmetria)

Definizione: Due giocatori i e j si dicono simmetrici se il loro contributo a una qualunque coalizione cui non appartengono risulta essere identico. Quindi i e j sono simmetrici se:

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$$

Proprietà: Se nel gioco (N, v) i giocatori i e j sono simmetrici, allora

$$\sigma_i(v) = \sigma_j(v).$$

Anonimità (o simmetria)

Esempio:

$N = \{1,2,3\}$

$v(1) = v(2) = v(3) = 0;$ $v(1,2) = v(1,3) = 4;$ $v(2,3) = 6;$ $v(1,2,3) = 20.$

$w(1) = w(2) = w(3) = 0;$ $w(2,3) = w(1,3) = 4;$ $w(1,2) = 6;$ $w(1,2,3) = 20.$

Che differenza c'è tra questi due giochi?

Anonimità (o simmetria)

Esempio:

$N = \{1,2,3\}$

$v(1) = v(2) = v(3) = 0;$ $v(1,2) = v(1,3) = 4;$ $v(2,3) = 6;$ $v(1,2,3) = 20.$

$w(1) = w(2) = w(3) = 0;$ $w(2,3) = w(1,3) = 4;$ $w(1,2) = 6;$ $w(1,2,3) = 20.$

Che differenza c'è tra questi due giochi?
L'anonimità richiede che noi diamo al giocatore 3 del gioco w esattamente quanto diamo al giocatore 1 nel gioco v.

Efficienza

Efficienza: Per ogni gioco v, si ha che il valore Shapley è una pre-imputazione, cioè

$$\sum_{i \in N} \sigma_i(v) = v(N),$$

cioè tutto quello che la grande coalizione riesce a ottenere viene ripartito tra i giocatori.

Osservazione:

Tutto questo ha senso se consideriamo i giochi superadditivi. Se un gioco non è superadditivo non ha senso pensare che si formi la grande coalizione.

Dummy player

Definizione: Chiamiamo **dummy player** un giocatore i che è ininfluente. Quindi, i è un dummy player se

$$v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(i) \;\; \forall S.$$

Proprietà del dummy player: Il valore Shapley di un dummy player i è pari a $v(i)$.

Giocatore nullo

Definizione: Chiamiamo **giocatore nullo** un giocatore i che non porta contributo ad alcuna coalizione, né positivo né negativo. Quindi, i è un giocatore nullo se

$$v(S \cup \{i\}) = v(S) \ \forall S.$$

Proprietà del giocatore nullo: Il valore Shapley di un giocatore nullo è pari a 0.

Additività

- Questo assioma stabilisce una proprietà di tipo matematico del valore Shapley, che non è molto significativa dal punto di vista della sua interpretazione nell'ambito dei giochi.
- Si basa sul fatto che un gioco è semplicemente una funzione definita sulle coalizioni, e che sommando due funzioni caratteristiche si ottiene un'altra funzione caratteristica, il che significa che la somma di due giochi è ancora un gioco.

Additività: Il valore Shapley è una soluzione additiva. Dati due giochi v_1, v_2 si ha che

$$\sigma_i(v_1 + v_2) = \sigma_i(v_1) + \sigma_i(v_2) \ \forall i \in N.$$

Teorema

Il valore Shapley è l'unico concetto di soluzione che verifica le proprietà di anonimità, dummy player, additività ed efficienza.

Il taxi

Tre amici vogliono dividere una corsa in taxi per tornare a casa. I costi per ogni possibile gruppo sono:

Ale: 10 euro

Bob: 10 euro

Chiara: 14 euro

Ale & Bob: 12 euro

Ale & Chiara: 18 euro

Bob & Chiara: 18 euro

Tutti insieme: 20 euro

Quanto dovrebbe pagare ognuno?

Il taxi

$v(\emptyset) = 0$
$v(A) = 10$
$v(B) = 10$
$v(C) = 14$
$v(A,B) = 12$
$v(A,C) = 18$
$v(B,C) = 18$
$v(N) = 20$

	ABC	ACB	BAC	BCA	CAB	CBA	Shapley
A	10	10	2	2	4	2	30/6 = 5€
B	2	2	10	10	2	4	30/6 = 5€
C	8	8	8	8	14	14	60/6 = 10€

I partiti

Ci sono 4 partiti:

- A ottiene il 40% dei voti;
- B ottiene il 23%;
- C ottiene il 19%;
- D ottiene il 18%

Per prendere un decisione è necessario avere il 51%. Trovare il valore Shapley.

Per la prossima volta

- Determinare il valore Shapley nel caso del gioco dei guanti e del gioco di maggioranza.