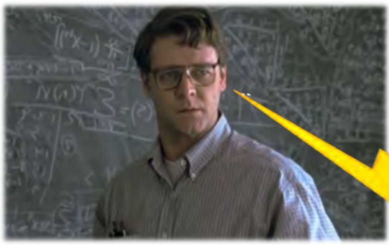
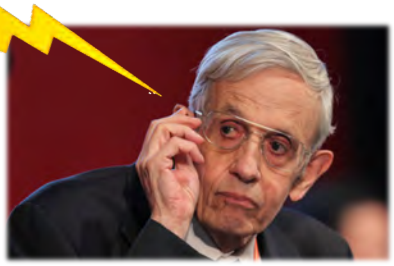


Giochi non cooperativi in forma strategica

Monica Salvioli



9 Novembre 2022

Nelle puntate precedenti…

- Giochi a **informazione completa**:

Tutti sanno le regole del gioco, tutti sanno che tutti sanno le regole del gioco, tutti sanno che tutti sono razionali, tutti sanno che tutti massimizzano la loro utilità…

- Giochi a **informazione perfetta**:

Tutto è palese, anche la situazione del gioco dopo ogni mossa

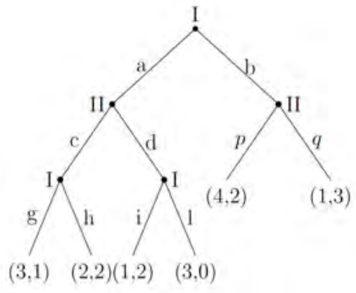
- Giochi a mosse contemporanee:

Il secondo giocatore non sa cosa ha giocato il primo

- Giochi in cui c'è una mossa della natura (o del caso…)

Qualche definizione

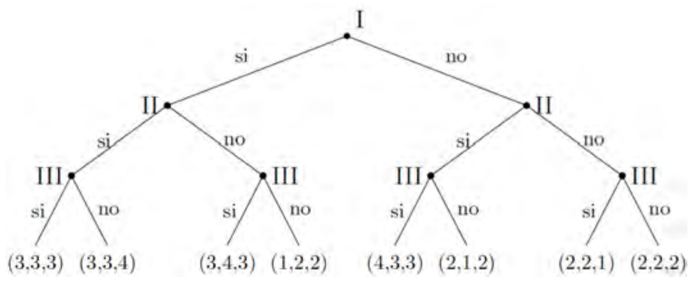
Dato un gioco a informazione perfetta descritto da un albero, si chiama **strategia** per il giocatore i la specificazione di una azione da prendere in ogni nodo etichettato col nome di i, si chiama **profilo di strategie** la specificazione di una strategia per ogni giocatore.



I: (a, g, i); (a, g, l); (a, h, i); (a, h, l); (b, g, i); (b, g, l); (b, h, i); (b, h, l)

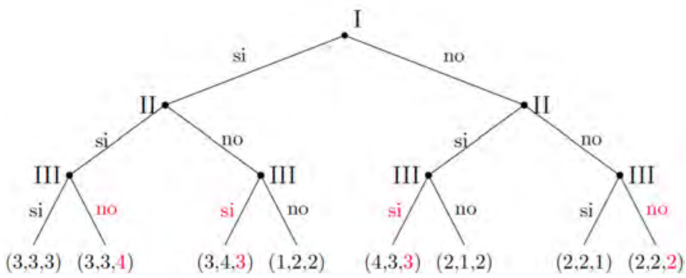
II: (c, p) ; (c, q) ; (d, p) ; (d, q)

Giochi in forma estesa



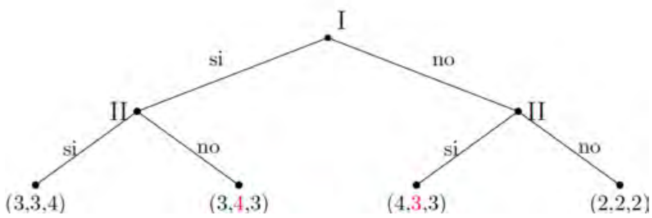
Abbiamo parlato di induzione a ritroso…

Giochi in forma estesa



Abbiamo parlato di induzione a ritroso…

Giochi in forma estesa



Abbiamo parlato di induzione a ritroso…

Giochi in forma strategica

1	3
4	2

John von Neumann

Giochi in forma strategica

1,6	3,-4
4,0	2,5

1949

John von Neumann

John Nash

Giochi in forma strategica

Un gioco in forma strategica è determinato da:

- Insieme di giocatori: $N = \{1,2, \ldots n\}$
- Uno spazio delle strategie per ogni giocatore: X e Y nel caso di due giocatori
- Una funzione di utilità per ogni giocatore, $f(x, y)$ e $g(x, y)$ nel caso di due giocatori), che rappresenti le preferenze del giocatore su tutti i possibili esiti del gioco.

Il vettore (x, y) è detto **profilo di strategie** per i giocatori. La funzione di utilità di ogni giocatore associa ad ogni profilo di strategie un numero, che rappresenta la soddisfazione del giocatore relativa all'esito del gioco determinato dalle strategie giocate.

Giochi in forma strategica

Se il primo giocatore ha n strategie e il secondo giocatore ha m strategie, allora il gioco può essere descritto dalla seguente tabella:

$(\boldsymbol{a}_{11}, \boldsymbol{b}_{11})$	$(\boldsymbol{a}_{12}, \boldsymbol{b}_{12})$	…	$(\boldsymbol{a}_{1m}, \boldsymbol{b}_{1m})$
$(\boldsymbol{a}_{21}, \boldsymbol{b}_{21})$	…	…	$(\boldsymbol{a}_{2m}, \boldsymbol{b}_{2m})$
…	…	…	…
$(\boldsymbol{a}_{n1}, \boldsymbol{b}_{n1})$	$(\boldsymbol{a}_{n2}, \boldsymbol{b}_{n2})$	…	$(\boldsymbol{a}_{nm}, \boldsymbol{b}_{nm})$

Quando il primo giocatore sceglie la riga i e il secondo la colonna j, allora a_{ij} è l'utilità del primo, mentre b_{ij} è quella del secondo. Questa tabella è detta **bimatrice**.

Esiti razionali

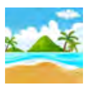
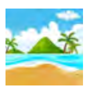
Ora che abbiamo trovato un modo semplice per rappresentare i giochi, ci chiediamo come risolverli.

- Quali sono gli esiti razionali del di un gioco?
- Come si trovano?

In vacanza

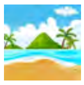
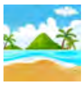
Due amici devono decidere se trascorrere le vacanze al mare o in montagna.

Il primo giocatore vorrebbe andare al mare e preferirebbe andarci in compagnia, mentre se si andasse in montagna preferirebbe andarci da solo.

		II	
			
I		(10, 10)	(1, -1)
		(1, -1)	(0, 0)

In vacanza

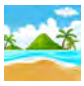
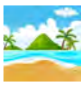
Notiamo che il primo giocatore preferisce il mare alla montagna, indipendentemente dal ritrovarsi solo o in compagnia!

		II	
			
I		(10,)	(1,)
		(1,)	(0,)

In vacanza

Notiamo che il primo giocatore preferisce il mare alla montagna, indipendentemente dal ritrovarsi solo o in compagnia!

Questo vuol dire che ha una strategia migliore dell'altra, ***a prescindere dalla scelta del secondo giocatore***! Quindi andrà al mare.

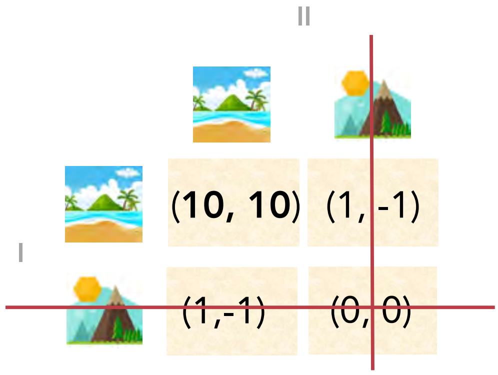
		II	
			
I		(10,)	(1,)
		~~(1,)~~	~~(0,)~~

In vacanza

Notiamo che il primo giocatore preferisce il mare alla montagna, indipendentemente dal ritrovarsi solo o in compagnia!

Questo vuol dire che ha una strategia migliore dell'altra, ***a prescindere dalla scelta del secondo giocatore***! Quindi andrà al mare.

Per il secondo giocatore non c'è, in generale, una strategia migliore. Ma, sapendo che il primo giocatore andrà al mare, anche la sua decisione è presa: si andrà al mare.



Strategie dominate

La razionalità dei giocatori implica che nessuno sceglie una strategia se un'altra gli permette di ottenere di più ***quali che siano le strategie degli altri giocatori***.

Si parla di ***eliminazione delle strategie dominate***: le strategie che portano risultati peggiori di altre, indipendentemente da quali siano le scelte degli altri giocatori, vengono eliminate, cioè non vengono giocate da giocatori razionali.

Siccome i giocatori sono razionali, questa informazione è ***nota a tutti***.

Strategie strettamente dominate

Supponiamo che la funzione di utilità di un giocatore sia $f(x, y)$, dove x rappresenta la sua strategia e y la strategia dell'altro giocatore.

Allora si dice che x^* è una strategia strettamente dominata se esiste una strategia $\bar{x}$ tale che

$$f(x^*, y) < f(\bar{x}, y) \text{ per ogni possibile } y$$

La prima ipotesi che faremo è che un giocatore non usi mai una strategia dominata, cioè non giochi mai x^* se giocando $\bar{x}$ guadagna di più, indipendentemente da quello che fa l'avversario.

Strategie debolmente dominate

Una strategia x^* è debolmente dominata per il primo giocatore da una strategia $\bar{x}$, se vale la relazione:

$$f(x^*, y) \leq f(\bar{x}, y) \text{ per ogni possibile } y$$

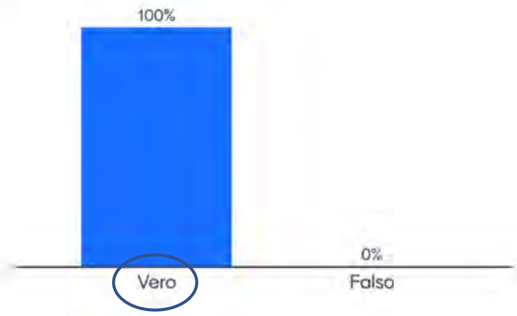
Le strategie debolmente dominate non vengono di solito eliminate, perché a volte potrebbe essere conveniente giocarle.

Mentimeter

In questo gioco la compagnia 1 ha una strategia strettamente dominante

	Prezzo basso	Prezzo alto
Prezzo basso	(48%,12%)	(60%,40%)
Prezzo alto	(40%,60%)	(32%,8%)

In questo gioco la compagnia 1 ha una strategia strettamente dominante

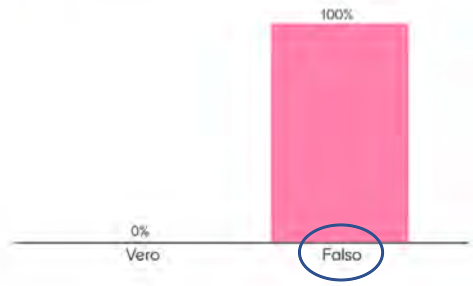


In questo gioco la compagnia 2 ha una strategia strettamente dominante

	Prezzo basso	Prezzo alto
Prezzo basso	(48%,12%)	(60%,40%)
Prezzo alto	(40%,60%)	(32%,8%)

In questo gioco la compagnia 2 ha una strategia strettamente dominante

Mentimeter



5

Ma ci sono sempre? No

	chiamare	non chiamare
chiamare	(0, 0)	(1, 1)
non chiamare	(1, 1)	(0, 0)

Due amici sono al telefono, quando cade la linea

- Entrambi possono provare a richiamare o aspettare che l'altro richiami
- Se entrambi richiamano contemporaneamente la linea risulterà occupata
- Se uno richiama e l'altro aspetta riusciranno a riprendere la conversazione

Cosa è un equilibrio?

L'equilibrio di un gioco è una indicazione di strategie che se comunicata ai giocatori fa sì che nessuno voglia giocare qualcosa di diverso, cambiando strategia e allontanandosi quindi dall'equilibrio stesso.

Le strategie di equilibrio ci indicano quali sono le scelte ottimali dei giocatori, quindi quali decisioni prenderanno giocando razionalmente.

Cosa è un equilibrio?

Ogni giocatore deve individuare la sua miglior risposta a tutte le possibili scelte dell'avversario.

Per esempio, se il mio amico richiama la mia migliore scelta è non richiamare, se lui non richiama la mia migliore scelta è richiamare.

Secondo Nash sono situazioni di equilibrio quelle in cui la mia strategia è la miglior risposta alla strategia dell'avversario e viceversa la strategia dell'avversario è la miglior risposta alla mia strategia.

Equilibrio di Nash: definizione

In un gioco tra due persone descritto dagli insiemi di strategie X e Y e dalle funzioni di utilità $f(x,y)$ e $g(x,y)$, una coppia di strategie $(\bar{x},\bar{y})$ è un equilibrio di Nash se:

$$f(\bar{x},\bar{y}) \geq f(x,\bar{y}) \text{ per ogni } x \in X,$$

$$g(\bar{x},\bar{y}) \geq g(\bar{x},y) \text{ per ogni } y \in Y.$$

L'equilibrio di Nash è quella situazione del gioco in cui, se tutti giocano le strategie indicate, nessun giocatore ha un guadagno a cambiare e prendere decisioni diverse.

Equilibrio di Nash: per ricordarselo…

https://www.youtube.com/watch?v=2d_dtTZQyUM

EQUILIBRIUM POINTS IN N-PERSON GAMES

By John F. Nash, Jr.*

Princeton University

Communicated by S. Lefschetz, November 16, 1949

One may define a concept of an n-person game in which each player has a finite set of pure strategies and in which a definite set of payments to the n players corresponds to each n-tuple of pure strategies, one strategy being taken for each player. For mixed strategies, which are probability distributions over the pure strategies, the pay-off functions are the expectations of the players, thus becoming polylinear forms in the probabilities with which the various players play their various pure strategies.

Any n-tuple of strategies, one for each player, may be regarded as a point in the product space obtained by multiplying the n strategy spaces of the players. One such n-tuple counters another if the strategy of each player in the countering n-tuple yields the highest obtainable expectation for its player against the $n - 1$ strategies of the other players in the countered n-tuple. A self-countering n-tuple is called an equilibrium point.

The correspondence of each n-tuple with its set of countering n-tuples gives a one-to-many mapping of the product space into itself. From the definition of countering we see that the set of countering points of a point is convex. By using the continuity of the pay-off functions we see that the graph of the mapping is closed. The closedness is equivalent to saying: if $P_1, P_2, \ldots$ and $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ are sequences of points in the product space where $Q_n \rightarrow Q$, $P_n \rightarrow P$ and Q_n counters P_n then Q counters P.

Since the graph is closed and since the image of each point under the mapping is convex, we infer from Kakutani's theorem[1] that the mapping has a fixed point (i.e., point contained in its image). Hence there is an equilibrium point.

In the two-person zero-sum case the "main theorem"[2] and the existence of an equilibrium point are equivalent. In this case any two equilibrium points lead to the same expectations for the players, but this need not occur in general.

* The author is indebted to Dr. David Gale for suggesting the use of Kakutani's theorem to simplify the proof and to the A. E. C. for financial support.

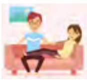
[1] Kakutani, S., *Duke Math. J.*, 8, 457–459 (1941).

[2] Von Neumann, J., and Morgenstern, O., *The Theory of Games and Economic Behaviour*, Chap. 3, Princeton University Press, Princeton, 1947.

Equilibri di Nash: qualche considerazione

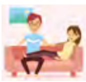
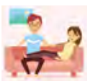
- I risultati ottenuti per eliminazione di strategie fortemente dominate sono equilibri di Nash
- In un gioco in forma estesa a informazione perfetta gli equilibri ottenuti per induzione a ritroso sono equilibri di Nash del corrispondente gioco in forma strategica
- Ma ce ne sono altri…

La battaglia dei sessi

		lui	
			
lei		(2, 1)	(0, 0)
		(0, 0)	(1, 2)

- Lei preferisce stare a casa a vedere la tv, lui preferisce andare a teatro
- Entrambi preferiscono essere in compagnia piuttosto che da soli
- Quanti sono gli equilibri di Nash?

La battaglia dei sessi

		lui	
			
lei		**(2, 1)**	(0, 0)
		(0, 0)	**(1, 2)**

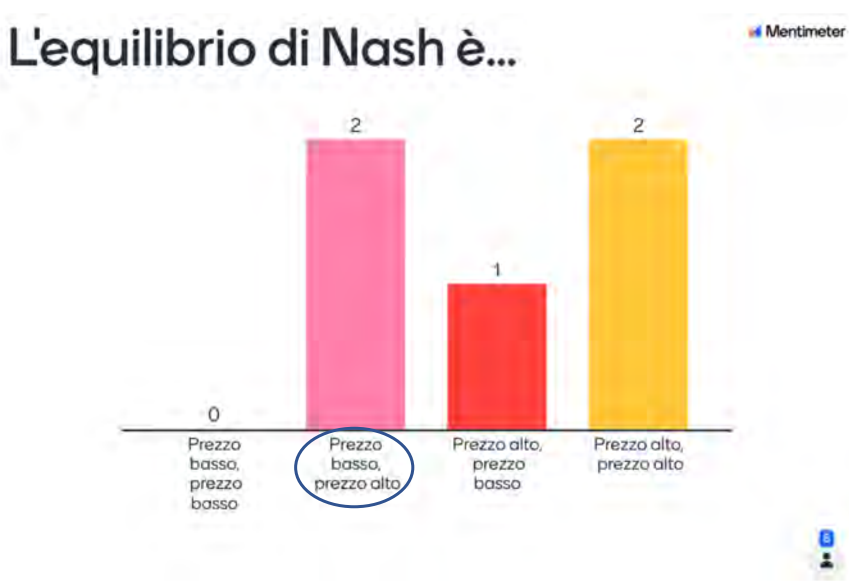
- Lei preferisce stare a casa a vedere la tv, lui preferisce andare a teatro
- Entrambi preferiscono essere in compagnia piuttosto che da soli
- Quanti sono gli equilibri di Nash?

Due, simmetrici

L'equilibrio di Nash è...

Mentimeter

	Prezzo basso	Prezzo alto
Prezzo basso	(48%,12%)	(60%,40%)
Prezzo alto	(40%,60%)	(32%,8%)



A caccia!

		
	(1, 1)	(1, 0)
	(0, 1)	(5, 5)

- Una coppia di amici sta andando a caccia. Ognuno può decidere se andare a cacciare un cervo o una lepre, ogni cacciatore può catturare da solo la lepre, invece per catturare il cervo deve esserci anche il suo compagno.
- Ovviamente è meglio catturare un cervo di una lepre, ma è meglio prendere una lepre che non prendere nulla
- Quanti sono gli equilibri di Nash?

A caccia!

	(1, 1)	(1, 0)
	(0, 1)	**(5, 5)**

- Una coppia di amici sta andando a caccia. Ognuno può decidere se andare a cacciare un cervo o una lepre, ogni cacciatore può catturare da solo la lepre, invece per catturare il cervo deve esserci anche il suo compagno.
- Ovviamente è meglio catturare un cervo di una lepre, ma è meglio prendere una lepre che non prendere nulla
- Quanti sono gli equilibri di Nash?

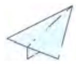
Due

Sasso carta forbice

	(0, 0)	(-1, 1)	(1, -1)
	(1, -1)	(0, 0)	(-1, 1)
	(-1, 1)	(1, -1)	(0, 0)

- Sasso batte forbice
  Forbice batte carta
  Carta batte sasso
- Vincita = +1
  Perdita = -1
  Pareggio = 0
- Quanti sono gli equilibri di Nash?

Sasso carta forbice

			
	(0, 0)	(-1, 1)	(1, -1)
	(1, -1)	(0, 0)	(-1, 1)
	(-1, 1)	(1, -1)	(0, 0)

- Sasso batte forbice
  Forbice batte carta
  Carta batte sasso
- Vincita = +1
  Perdita = -1
  Pareggio = 0
- Quanti sono gli equilibri di Nash?

Non ce ne sono!

E quindi?

Prossima lezione

Giovedì 10 Novembre: Equilibri di Nash

(Online)

Dalla prima lezione

Avete la possibilità di guadagnare punti bonus per l'esame. Potete scegliere tra:

- un punto bonus per me
- tre punti bonus per il mio collega.

Cosa fate?

	1 a me	3 al collega
1 a me	(1, 1)	(4, 0)
3 al collega	(0, 4)	(3, 3)

Esercizio: Gioco dell'otto

Abbiamo un appuntamento con la fidanzata/o alle ore 18. Alle ore 16 ci telefona un amico perché manca un giocatore per la partita di calcetto. Noi abbiamo due possibilità:

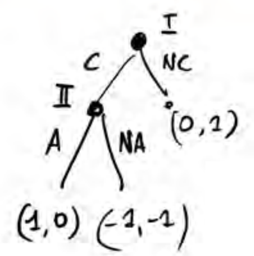
- dire di no perché abbiamo appuntamento con la fidanzata;
- dire di sí e arrivare in ritardo all'appuntamento.

La fidanzata a questo punto potrebbe o andarsene o aspettarci. Il nostro ordine di preferenze è:

1. giocare a calcetto e incontrarci un po' in ritardo con la fidanzata (1);
2. incontrarci con la fidanzata rinunciando al calcetto (0);
3. giocare a calcetto e perdere l'appuntamento (−1).

L'ordine di preferenza della fidanzata è:

1. che noi arriviamo in tempo all'appuntamento (1);
2. aspettarci perché siamo in ritardo (0);
3. andarsene perché siamo in ritardo (−1)



strategie I : $\{C, NC\}$

strategie II : $\{A, NA\}$

$$\begin{array}{ccc} & & \text{II} \\ & A & NA \end{array}$$
$$\text{I} \quad \begin{array}{c} C \\ NC \end{array} \begin{pmatrix} (1,0) & (-1,1) \\ (0,1) & (0,1) \end{pmatrix}$$

Esercizio: Poker semplificato

C'è un mazzo con sole due carte: *A* e *K*. *A* è la carta "alta" (cioè quella che vince) e *K* è la carta bassa. Il mazzo viene accuratamente mescolato; il gioco inizia con *I* che estrae una carta dal mazzo coperto e la guarda. Può fare due cose:

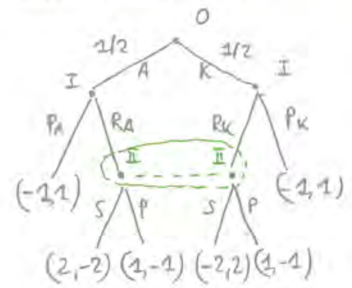
- **passare**, nel qual caso deve dare 1 euro a *II*;
- **rilanciare** (a 2 euro).

Se *I* ha passato, il gioco è finito. Se ha rilanciato, tocca a *II*, il quale può:

- **passare**, nel qual caso è lui che deve dare 1 euro a *I*;
- **vedere**, nel qual caso *I* deve mostrare la sua carta e
    - Se *I* ha la carta "alta", cioè *A*, *II* deve dare 2 euro a *I*;
    - se *I* ha la carta "bassa", cioè *K*, *I* deve dare 2 euro a *II*.

POKER SEMPLIFICATO

A: carta alta
K: carta bassa
P: passa
S: rilancia e vede



La matrice del gioco è:

$$\begin{array}{cc} & \mathrm{II} \\ & \begin{array}{cc} P & S \end{array} \\ \mathrm{I} \begin{array}{c} R_A P_K \\ R_A R_K \\ P_A P_K \\ P_A R_K \end{array} & \begin{pmatrix} (0,0) & (\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) \\ (1,-1) & (0,0) \\ (-1,1) & (-1,1) \\ (0,0) & (-\frac{3}{2},\frac{3}{2}) \end{pmatrix} \end{array}$$