

# Teoria dei Giochi

**Anna Torre**

Almo Collegio Borromeo 3 novembre 2022 email: [anna.torre@unipv.it](mailto:anna.torre@unipv.it)

# RIPASSO

- ▶ **Theory of Games and Economic Behavior**, pubblicato nel 1944 (Princeton University Press);
- ▶ John von Neumann, nato János Lajos Neumann (Budapest, 28 dicembre 1903 , Washington, 8 febbraio 1957), è stato un matematico, fisico e informatico ungherese naturalizzato statunitense;
- ▶ Oskar Morgenstern (Goerlitz, 24 gennaio 1902 , Princeton, 26 luglio 1977) è stato un economista austriaco.

# PREGRESSI

- ▶ Dalla fine del settecento c'era il progetto di estendere ad altri campi del sapere il metodo matematico che aveva rivoluzionato lo studio della fisica usando un modello molto simile a quello della fisica matematica (vedi "Elements of Pure Economics" di Walras 1874);
- ▶ von Neumann e Morgenstern (1944) presentano una critica radicale alla teoria walrasiana dell'equilibrio economico generale, rea, secondo gli autori, di non tenere in considerazione l'influsso che le interazioni con gli altri individui hanno sulle decisioni di ogni singolo individuo.

# COME DESCRIVERE UN GIOCO

- ▶ Una importante classificazione che occorre fare nel contesto dei giochi discende dalla risposta alla seguente domanda:  
**“Vi è oppure no per i giocatori la possibilità di sottoscrivere accordi vincolanti?”**
- ▶ in presenza di questa possibilità si parla di **giochi cooperativi**, in caso contrario si parla di **giochi non cooperativi**.
- ▶ **Parleremo di giochi non cooperativi a due giocatori.**

# Giochi non cooperativi

Un'ulteriore distinzione è quella fra **giochi ad Informazione completa e giochi ad Informazione incompleta.**

In un gioco a **Informazione completa** le regole del gioco e le funzioni di utilità di tutti i giocatori sono conoscenza comune dei giocatori.

L'ipotesi di informazione incompleta porta a una teoria più sofisticata ma anche più soddisfacente, proprio in quanto più aderente alla realtà. Noi però ci occuperemo di giochi **a informazione completa.**

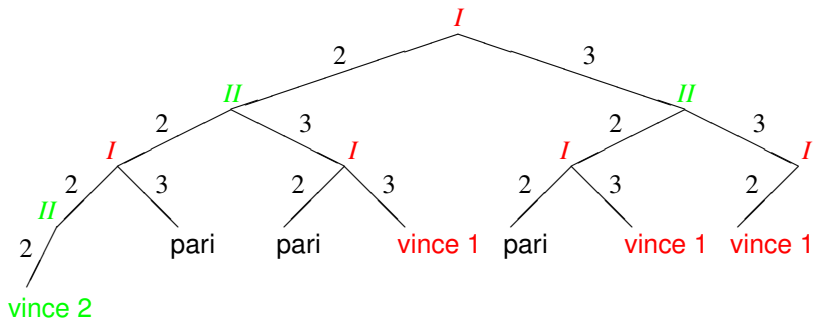
# Forma estesa

La forma estesa consiste in una descrizione dettagliata di tutte le possibili partite. È stata introdotta da von Neumann e Morgenstern (1944) e formalizzata da Kuhn (1953)

# IL GIOCO DELL'OTTO

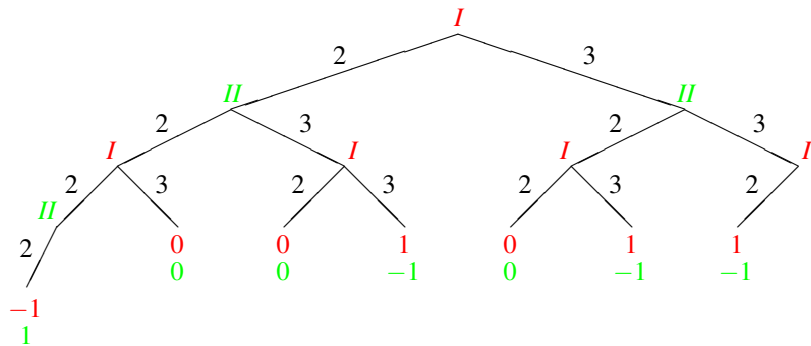
- ▶ Si gioca in due.
- ▶ Il primo giocatore può scegliere di giocare 2 o 3.
- ▶ Successivamente il secondo giocatore fa la stessa cosa.
- ▶ I numeri giocati vengono sommati.
- ▶ E così via a turno, ma è vietato fare una mossa che porti ad un totale superiore ad 8.
- ▶ Vince chi fa in modo che la somma dei numeri giocati sia 8.

# La GAME FORM DEL GIOCO DELL'OTTO (IN "FORMA ESTESA")

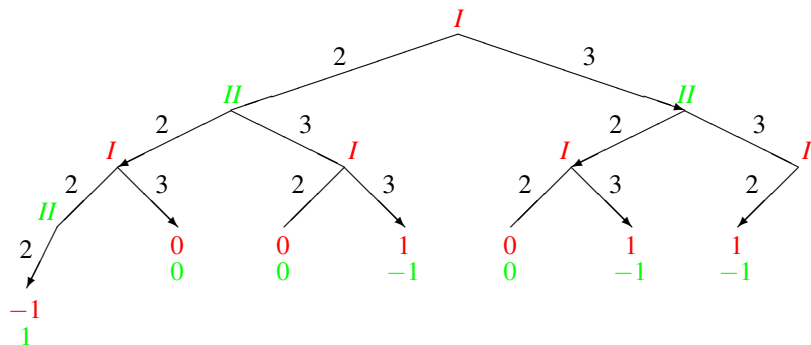




# IL GIOCO DELL'OTTO (IN "FORMA ESTESA") con le utilità standard per i giocatori



# INDUZIONE A RITROSO



# GIOCO DEL “PALLONE O FIDANZATA/O”

Abbiamo un appuntamento con la fidanzata/o alle ore 18.

Alle ore 16 ci telefona un amico perché manca un giocatore per la partita di calcetto. Noi abbiamo due possibilità:

- a) dirgli di no perché abbiamo appuntamento con la fidanzata;
- b) dirgli di sí arrivare in ritardo all'appuntamento.

La fidanzata a questo punto potrebbe o andarsene o aspettarci.

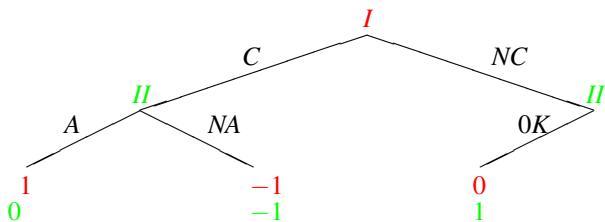
Il nostro ordine di preferenze è:

1. giocare a calcetto e incontrarci un po' in ritardo con la fidanzata (1);
2. incontrarci con la fidanzata rinunciando al calcetto (0);
3. giocare a calcetto e perdere l'appuntamento (-1).

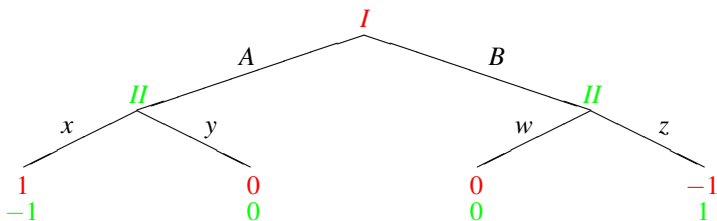
L'ordine di preferenza della fidanzata è:

1. che noi arriviamo in tempo all'appuntamento (1);
2. aspettarci perché siamo in ritardo (0);
3. andarsene perché siamo in ritardo (-1).

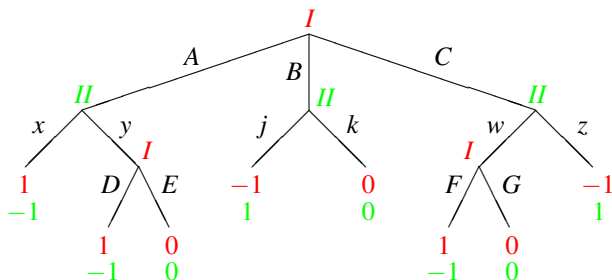
# FORMA ESTESA



# UN ALTRO GIOCO IN FORMA ESTESA



# UN ALTRO GIOCO IN FORMA ESTESA



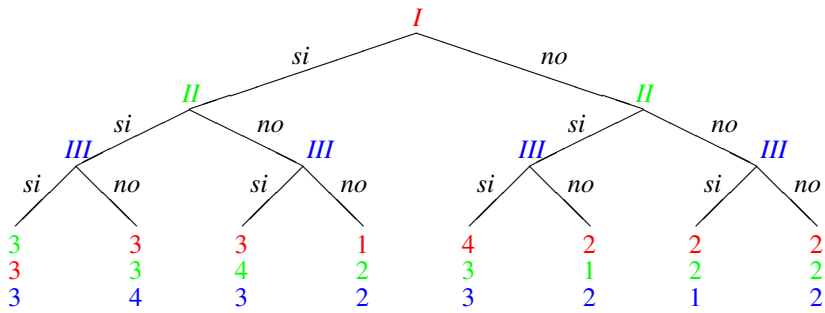
# ESERCIZIO

Tre fratelli sono a casa dei nonni quando ricevono un invito per uscire a cena con gli amici. Ciascuno di loro vorrebbe andare ma non vuole dirlo esplicitamente ai nonni. La decisione viene presa a maggioranza e i tre fratelli votano pubblicamente davanti ai nonni.

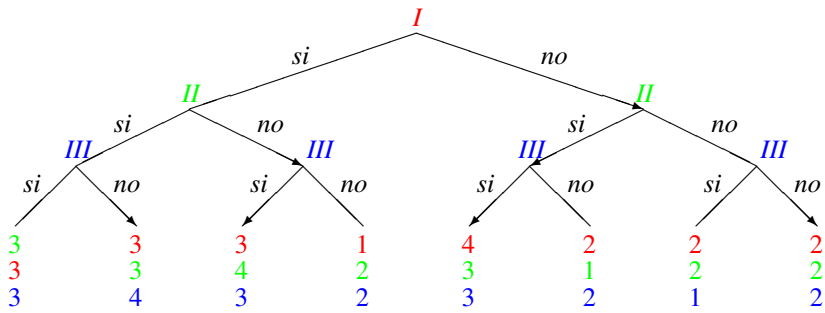
Le preferenze sono:

- ▶ Dire di no e andare è la cosa migliore;
- ▶ Dire di sì e andare è la seconda opzione;
- ▶ Dire di no e non andare è la terza opzione;
- ▶ Dire di sì e non andare è la quarta opzione.

Descrivere il gioco in forma estesa assegnando utilità ai vari esiti.







# ESERCIZIO:FIAMMIFERI

Ci sono due mucchietti di due fiammiferi ciascuno.

Due giocatori a turno levano un certo numero (strettamente positivo) di fiammiferi tutti dallo stesso mucchio.

Chi toglie l'ultimo fiammifero perde.

Costruire l' albero.

# INFORMAZIONE PERFETTA

Un gioco descritto tramite una successione finita di mosse (finito) si dice **a informazione perfetta** se lo stato del gioco è noto (pubblico) a tutti i giocatori dopo ogni mossa.

# TEOREMA DI ZERMELO-KUHN

E. Zermelo, Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels, Proc. Fifth Congress Mathematicians, (Cambridge 1912), Cambridge University Press 1913, 501-504.

Kuhn, Harold W. (1953), Extensive Games and the Problem of Information, in H. W. Kuhn and A. W. Tucker (eds.), Contributions to the Theory of Games, Volume II, Princeton University Press, Princeton.

Un gioco in forma estesa a informazione perfetta ha un equilibrio che si ottiene per induzione a ritroso (vedremo poi che questo è un equilibrio di Nash).

# SCACCHI

Il gioco degli scacchi si riduce all'albero (gigantesco, ma finito) che comprende tutte le possibili mosse di tutte le possibili partite:

il primo livello consiste delle 20 possibili aperture del bianco;

il secondo livello delle 20 possibili aperture del nero in risposta a ciascuna apertura del bianco, cioè dei 400 possibili scambi di

apertura;

ogni livello si ottiene dal precedente aggiungendo a ciascun nodo tutte le possibili risposte.

Ciascun ramo dell'albero è finito, e descrive una partita che finisce o in una vittoria del bianco, o in una vittoria del nero, o in una patta.

# IL TEOREMA SUGLI SCACCHI

Al Congresso Internazionale dei Matematici del 1912 Ernst Zermelo notò che il gioco degli scacchi è determinato, nel senso seguente: o esiste una strategia che permette al bianco di vincere sempre, o esiste una strategia che permette al nero di vincere sempre, o esiste una strategia che permette a entrambi i giocatori di pattare sempre (affermazione ben più forte di quella, ovvia, che in ogni partita o il bianco vince, o il nero vince, o i due pattano).

Nel 1953 Kuhn generalizzò il risultato a tutti i giochi in forma estesa a informazione perfetta.

# MOSSE CONTEMPORANEE E MOSSE DEL CASO

Per descrivere i giochi in forma estesa ci restano ancora due problemi:

- ▶ Come descrivere il caso di mosse contemporanee?
- ▶ Come descrivere la situazione in cui ci sono “mosse del caso”?

# LA MORRA CINESE

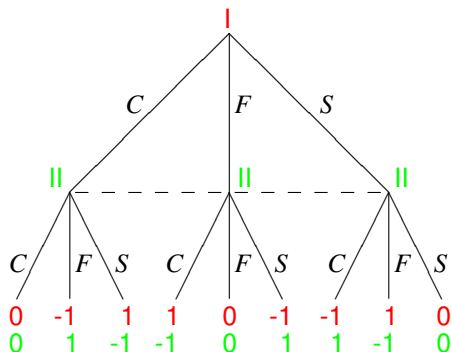
- ▶ Si gioca in due.
- ▶ Ciascun giocatore deve dichiarare contemporaneamente all'altro una delle seguenti mosse:

Carta, Forbice, Sasso.

- ▶ Forbice vince su Carta;
- ▶ Carta vince su Sasso;
- ▶ Sasso vince su Forbice.
- ▶ Se entrambi giocano la stessa cosa la partita è pari.



# LA MORRA CINESE IN FORMA ESTESA



Si tratta di un gioco a informazione imperfetta, perché le mosse sono contemporanee (qui abbiamo scritto il gioco con i valori di utilità convenzionali per i due giocatori: 1 per la vittoria, 0 per il pareggio e -1 per la sconfitta).

# UN POKER SEMPLIFICATO

C'è un mazzo con sole due carte:  $A$  e  $K$ .  $A$  è la carta “alta” (cioè quella che vince) e  $K$  è la carta bassa.

Il mazzo viene accuratamente mescolato; il gioco inizia con  $I$  che estrae una carta dal mazzo coperto e la guarda. Può fare due cose:

- ▶ **passare**, nel qual caso lui deve dare 1 euro a  $II$ ;
- ▶ **rilanciare** (a 2 euro).

Se  $I$  ha passato, il gioco è finito. Se ha rilanciato, tocca a  $II$ , il quale può:

- ▶ **passare**, nel qual caso è lui che deve dare 1 euro a  $I$ ;
- ▶ **vedere**, nel qual caso  $I$  deve mostrare la sua carta e
  - ▶ se  $I$  ha la carta “alta”, cioè  $A$ ,  $II$  deve dare 2 euro a  $I$ ;
  - ▶ se  $I$  ha la carta “bassa”, cioè  $K$ ,  $I$  deve dare 2 euro a  $II$ .

# IL POKER SEMPLIFICATO IN FORMA ESTESA

