Equilibri di Nash in strategie miste

Monica Salvioli

10 Novembre 2022

Nella puntata precedente…

- Giochi a due giocatori in forma strategica: cosa serve per definirli
- Strategie strettamente e debolmente dominate
- Definizione di equilibrio di Nash
- Come trovare gli equilibri di Nash

Esercizio

Determinare gli equilibri in strategie pure del seguente gioco:

$$\begin{array}{cc} & \text{II} \\ \text{I} & \begin{pmatrix} (5,4) & (1,6) & (0,3) & (5,1) \\ (5,3) & (3,2) & (1,0) & (4,3) \\ (2,5) & (4,0) & (1,5) & (2,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Esercizio: al pascolo!

Ci sono tre pastori che condividono 12 campi. Ogni mattina ciascuno decide quanti animali mandare al pascolo, cioè quanti campi occupare. Alla fine della giornata ciascuno otterrà un numero di litri di latte pari al numero di campi che ha occupato per il numero di campi lasciati liberi quel giorno.

*Litri di latte per il giocatore A = #campi occupati da A * # campi lasciati liberi quel giorno*

Quanti campi conviene occupare?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

litri per il giocatore A = campi occupati da A × campi liberi

III = 2

I \ II	2	3
2	(12,12,12)	(10,15,10)
3	(15,10,10)	(12,12,8)

III = 3

I \ II	2	3
2	(10,10,15)	(8,12,12)
3	(12,8,12)	(9,9,9)

La tragedia dei beni comuni

«Se una persona conduce al pascolo più capi di bestiame nel proprio campo, la quantità di erba che viene consumata è sottratta da quella inizialmente a disposizione; inoltre, se precedentemente l'erba presente nel pascolo era appena sufficiente, allora il pastore non trarrà alcun beneficio dal condurre un maggior numero di capi di bestiame, dato che ciò che viene guadagnato in un modo viene perso in un altro. Ma se mette più capi di bestiame in un pascolo comune, l'erba consumata forma una perdita che è indirettamente condivisa tra tutto il bestiame, sia quello altrui che il proprio, in proporzione al loro numero, ma solo una piccola parte di questa perdita colpisce il proprio bestiame. In un pascolo chiuso, vi è un punto di saturazione, se così posso chiamarlo, una sorta di impedimento funzionale, oltre al quale nessun pastore prudente aggiungerà altro bestiame. Anche in un pascolo comune c'è alla stessa maniera un punto di saturazione. Ma la posizione di questo punto nei due casi è ovviamente differente. Se un numero di pascoli confinanti, già completamente pieni, fossero in una volta aperti e convertiti in un unico campo, la posizione del punto di saturazione cambierebbe immediatamente»

(W. F. Lloyd, Two Lectures on the Checks to Population)

Il beneficio di aumentare di una unità il bestiame al pascolo è superiore alla diminuzione del bene comune (erba) che viene invece ripartito tra tutti i pastori presenti. Da qui l'incentivo individuale ad aumentare sempre più i capi di bestiame che si portano al pascolo fino alla distruzione del pascolo.

Le due carte

- Ogni giocatore ha in mano una carta rossa e una carta nera
- Contemporaneamente i due giocatori scartano una delle due carte
- Se le due carte scartate sono dello stesso colore il primo giocatore guadagna un punto
- Se sono di colore diverso è il secondo a guadagnare un punto
- Scriviamo la matrice del gioco

Le due carte

I \ II	ROSSA	NERA
ROSSA	(1, 0)	(0, 1)
NERA	(0, 1)	(1, 0)

Cerchiamo gli equilibri di Nash di questo gioco…

Le due carte

	ROSSA	NERA
ROSSA	(1, 0)	(0, 1)
NERA	(0, 1)	(1, 0)

Non riusciamo a trovare due strategie che siano una la scelta ottimale rispetto all'altra e viceversa…non c'è equilibrio…

Le due carte

	ROSSA	NERA
ROSSA	(1, 0)	(0, 1)
NERA	(0, 1)	(1, 0)

Se ci trovassimo a giocare questo gioco di sicuro non decideremmo di scartare sempre le carte di un solo colore, altrimenti chi ci osserva capirebbe la nostra strategia e sceglierebbe la sua in modo da vincere sempre…

Non sempre è ottimale selezionare a priori una strategia e attenersi ad essa ogni volta che si gioca!

Dobbiamo abbandonare l'idea di definire un comportamento razionale in questo caso?

No, ma dovremo **ampliare** la nostra definizione di equilibrio.

Equilibri in strategie miste

- Decidiamo di ampliare lo spazio delle strategie dei giocatori introducendo una distribuzione di probabilità sulle possibili scelte.
- Queste nuove strategie dei giocatori vengono chiamate **strategie miste.**
- A ogni strategia pura (= strategia di partenza) viene associato un valore che rappresenta la probabilità con cui viene giocata quella strategia.
- A questo punto le strategie dei giocatori consistono nello stabilire la probabilità con cui scegliere le strategie del gioco iniziale.

Equilibri in strategie miste

- In pratica, l'idea è di giocare diversificando le nostre azioni.
- Per esempio, potremmo tirare una moneta prima di ogni giocata:
  - se viene testa, scartiamo la carta rossa;
  - se viene croce, scartiamo la carta nera.
- Questo significa associare una distribuzione di probabilità alle azioni che si possono compiere. In questo esempio, la distribuzione di probabilità potrebbe essere espressa come $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
- In questo modo, il nostro avversario non ha nessuna strategia che gli permetta di avere un vantaggio su di noi. Entrambi vinceremo o perderemo in media metà delle volte.

Formalizziamo

- Dato un gioco finito (con un numero finito di giocatori e strategie), la sua estensione in strategie miste è un gioco in cui:
  - I giocatori sono sempre gli stessi;
  - L'insieme delle strategie di ogni giocatore è l'insieme delle distribuzioni di probabilità sulle **strategie pure** del gioco di partenza;
  - Le funzioni di utilità dei giocatori sono calcolate come **valore atteso.**

Come si trovano gli equilibri in miste?

		q	$1-q$
		ROSSA	NERA
p	ROSSA	(1, 0)	(0, 1)
$1-p$	NERA	(0, 1)	(1, 0)

- Visto che ciascun giocatore ha solo due strategie a disposizione, giocherà la prima con una certa probabilità p e la seconda con probabilità $1-p$
- Indicheremo le strategie disposizione del primo giocatore con $(p, 1-p)$
- Il primo giocatore deciderà di mostrare la carta rossa con probabilità p e di mostrare la carta nera con probabilità $1-p$
- Allo stesso modo indicheremo le strategie del secondo giocatore con $(q, 1-q)$

Come si trovano gli equilibri in miste?

		q	$1-q$
		ROSSA	NERA
p	ROSSA	(1, 0)	(0, 1)
$1-p$	NERA	(0, 1)	(1, 0)

pq	$p(1-q)$
$(1-p)q$	$(1-p)(1-q)$

Probabilità che si verifichi ciascun esito del gioco

- Dobbiamo ora calcolare le funzioni di utilità dei giocatori, come valori attesi
- Dobbiamo verificare quale sia la probabilità di ritrovarsi in ciascuno degli esiti possibili
- Per esempio, la probabilità che entrambi giochino la carta rossa è uguale al prodotto tra la probabilità che il primo giocatore mostri la carta rossa e la probabilità che anche il secondo faccia questa scelta, quindi pq

Come si trovano gli equilibri in miste?

		q	$1-q$
		ROSSA	NERA
p	ROSSA	(1, 0)	(0, 1)
$1-p$	NERA	(0, 1)	(1, 0)

Per calcolare le funzioni di utilità dei giocatori, moltiplichiamo quanto otterrebbero in un determinato esito del gioco per la probabilità che quello stesso esito venga giocato.

pq	$p(1-q)$
$(1-p)q$	$(1-p)(1-q)$

Probabilità che si verifichi ciascun esito del gioco

Come si trovano gli equilibri in miste?

		q	$1-q$
		ROSSA	NERA
p	ROSSA	(1, 0)	(0, 1)
$1-p$	NERA	(0, 1)	(1, 0)

Per calcolare le funzioni di utilità dei giocatori, moltiplichiamo quanto otterrebbero in un determinato esito del gioco per la probabilità che quello stesso esito venga giocato.

Per il primo giocatore:

$$f(p,q) = \boldsymbol{pq} * \mathbf{1}$$

$\boldsymbol{pq}$	$p(1-q)$
$(1-p)q$	$(1-p)(1-q)$

Probabilità che si verifichi ciascun esito del gioco

Come si trovano gli equilibri in miste?

		q	$1-q$
		ROSSA	NERA
p	ROSSA	(1, 0)	(0, 1)
$1-p$	NERA	(0, 1)	(1, 0)

pq	$p(1-q)$
$(1-p)q$	$(1-p)(1-q)$

Probabilità che si verifichi ciascun esito del gioco

Per calcolare le funzioni di utilità dei giocatori, moltiplichiamo quanto otterrebbero in un determinato esito del gioco per la probabilità che quello stesso esito venga giocato.

Per il primo giocatore:

$$f(p,q) = pq * 1 + p(1-q) * 0$$

Come si trovano gli equilibri in miste?

		q	$1-q$
		ROSSA	NERA
p	ROSSA	(1, 0)	(0, 1)
$1-p$	NERA	(0, 1)	(1, 0)

pq	$p(1-q)$
$(1-p)q$	$(1-p)(1-q)$

Probabilità che si verifichi ciascun esito del gioco

Per calcolare le funzioni di utilità dei giocatori, moltiplichiamo quanto otterrebbero in un determinato esito del gioco per la probabilità che quello stesso esito venga giocato.

Per il primo giocatore:

$$f(p,q) = pq * 1 + p(1-q) * 0 + (1-p)q * 0$$

Come si trovano gli equilibri in miste?

		q	$1-q$
		ROSSA	NERA
p	ROSSA	(1, 0)	(0, 1)
$1-p$	NERA	(0, 1)	(1, 0)

pq	$p(1-q)$
$(1-p)q$	$(1-p)(1-q)$

Probabilità che si verifichi ciascun esito del gioco

Per calcolare le funzioni di utilità dei giocatori, moltiplichiamo quanto otterrebbero in un determinato esito del gioco per la probabilità che quello stesso esito venga giocato.

Per il primo giocatore:

$$f(p,q) = pq * 1 + p(1-q) * 0 + (1-p)q * 0 + (1-p)(1-q) * 1$$

Come si trovano gli equilibri in miste?

		q	$1-q$
		ROSSA	NERA
p	ROSSA	(1, 0)	(0, 1)
$1-p$	NERA	(0, 1)	(1, 0)

pq	$p(1-q)$
$(1-p)q$	$(1-p)(1-q)$

Probabilità che si verifichi ciascun esito del gioco

Per calcolare le funzioni di utilità dei giocatori, moltiplichiamo quanto otterrebbero in un determinato esito del gioco per la probabilità che quello stesso esito venga giocato.

Per il primo giocatore:

$$f(p,q) = pq * 1 + p(1-q) * 0 + (1-p)q * 0 + (1-p)(1-q) * 1$$

Per il secondo:

$$g(p,q) = pq * 0 + p(1-q) * 1 + (1-p)q * 1 + (1-p)(1-q) * 0$$

Come si trovano gli equilibri in miste?

		q	$1-q$
		ROSSA	NERA
p	ROSSA	(1, 0)	(0, 1)
$1-p$	NERA	(0, 1)	(1, 0)

pq	$p(1-q)$
$(1-p)q$	$(1-p)(1-q)$

Probabilità che si verifichi ciascun esito del gioco

Per calcolare le funzioni di utilità dei giocatori, moltiplichiamo quanto otterrebbero in un determinato esito del gioco per la probabilità che quello stesso esito venga giocato.

Per il primo giocatore:

$f(p,q) = 2pq + 1 - p - q$

Per il secondo:

$g(p,q) = p + q - 2pq$

Come si trovano gli equilibri in miste?

		q	$1-q$
		ROSSA	NERA
p	ROSSA	(1, 0)	(0, 1)
$1-p$	NERA	(0, 1)	(1, 0)

pq	$p(1-q)$
$(1-p)q$	$(1-p)(1-q)$

Probabilità che si verifichi ciascun esito del gioco

Questo nuovo gioco tra due giocatori con strategie $(p, 1-p)$ e $(q, 1-q)$ e funzioni di utilità

$$f(p,q) = 2pq + 1 - p - q$$

e

$$g(p,q) = p + q - 2pq$$

rappresenta l'estensione mista del gioco di partenza.

Considerando questa estensione, possiamo applicare il concetto di equilibrio di Nash.

Come si trovano gli equilibri in miste?

Parto dal primo giocatore.

$$f(p,q) = 2pq + 1 - p - q = p(2q - 1) + 1 - q$$

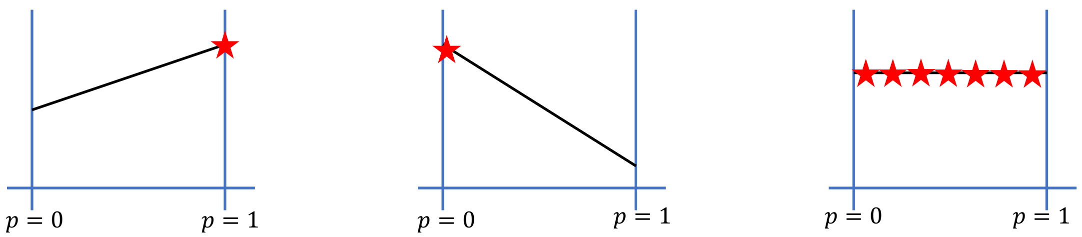
Quindi ho una funzione di p, di cui voglio trovare il massimo.

Come si trovano gli equilibri in miste?

Parto dal primo giocatore.

$$f(p,q) = 2pq + 1 - p - q = p(2q - 1) + 1 - q$$

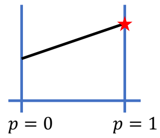
Quindi ho una funzione di p, di cui voglio trovare il massimo. Tre possibilità:



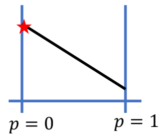
Come si trovano gli equilibri in miste?

Tutto dipende dal coefficiente angolare $(2q-1)$:

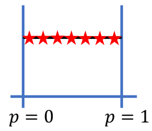
- Se $2q-1>0$, cioè $q>\frac{1}{2}$, allora siamo nel primo caso e la miglior risposta del primo giocatore sarà $p=1$;



- Se $2q-1<0$, cioè $q<\frac{1}{2}$, allora siamo nel secondo caso e la miglior risposta del primo giocatore sarà $p=0$;

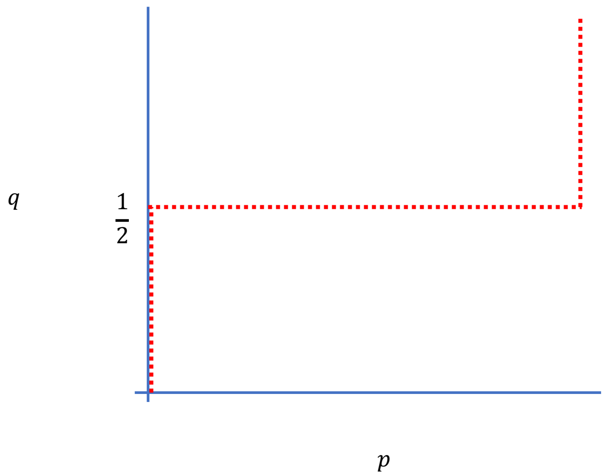


- Se $2q-1=0$, cioè $q=\frac{1}{2}$, allora siamo nel terzo caso e ogni $p \in [0,1]$ sarà una miglior risposta



Come si trovano gli equilibri in miste?

Riassumendo:

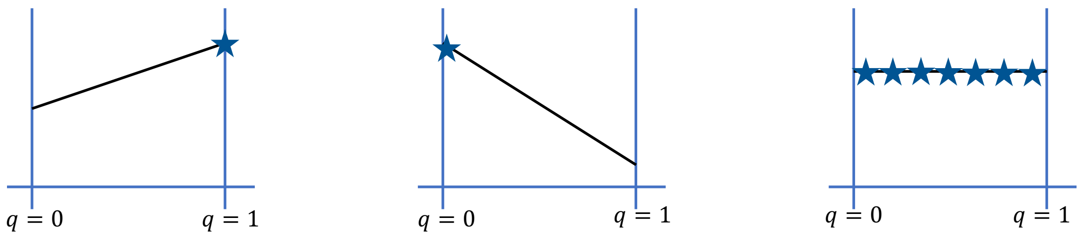


Come si trovano gli equilibri in miste?

Consideriamo ora il secondo giocatore

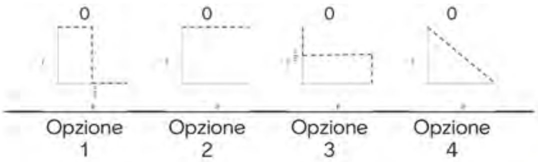
$$g(p,q) = p + q - 2pq = q(1-2p) + p$$

Quindi ho una funzione di q, di cui voglio trovare il massimo. Tre possibilità:



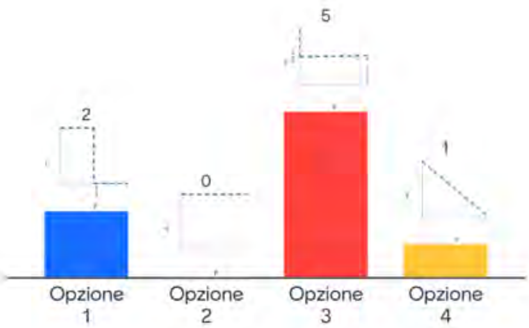
Come è fatta la miglior risposta del secondo giocatore?

Mentimeter



Come è fatta la miglior risposta del secondo giocatore?

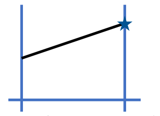
Mentimeter



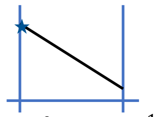
8

Come si trovano gli equilibri in miste?

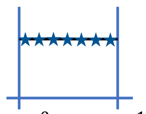
Tutto dipende dal coefficiente angolare $(1-2p)$:



- Se $1-2p > 0$ cioè $p < \frac{1}{2}$, allora siamo nel primo caso e la miglior risposta del primo giocatore sarà $q = 1$;



- Se $1-2p < 0$, cioè $p > \frac{1}{2}$, allora siamo nel secondo caso e la miglior risposta del primo giocatore sarà $q = 0$;

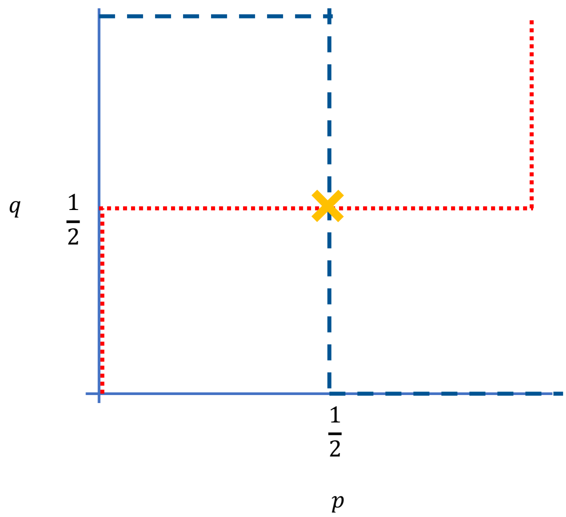


- Se $1-2p = 0$, cioè $p = \frac{1}{2}$, allora siamo nel terzo caso e ogni $q \in [0,1]$ sarà una miglior risposta.

Come si trovano gli equilibri in miste?

Riassumendo:

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ è un equilibrio di Nash in strategie miste



Teorema di Nash

Siano X e Y sottoinsiemi chiusi, convessi e limitati di $\mathbb{R}^n$ (per esempio l'insieme delle strategie miste di un gioco finito soddisfa a queste proprietà) e f e g due funzioni continue. Supponiamo inoltre che valgano le seguenti proprietà:

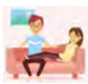
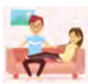
- $x \rightarrow f(x,\ y)$ è quasi concava per ogni y fissato
- $y \rightarrow g(x, y)$ è quasi concava per ogni x fissato

Allora esiste almeno un equilibrio di Nash.

(Ogni gioco ammette almeno un equilibrio di Nash in strategie pure o miste)

Per la prossima volta

Analizzare il gioco della battaglia dei sessi in strategie miste.

		
	(2, 1)	(0, 0)
	(0, 0)	(1, 2)