Teoria dei Giochi

Anna Torre

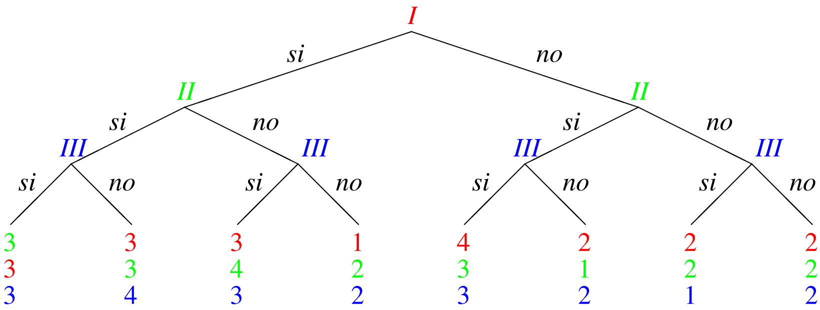
Almo Collegio Borromeo 9 marzo 2022 email: anna.torre@unipv.it

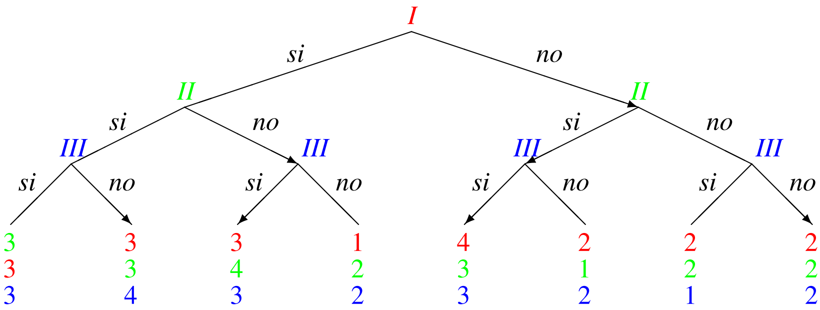
ESERCIZIO

Tre fratelli sono a casa dei nonni quando ricevono un invito per uscire a cena con gli amici. Ciascuno di loro vorrebbe andare ma non vuole dirlo esplicitamente ai nonni. La decisione viene presa a maggioranza e i tre fratelli votano pubblicamente davanti ai nonni.
Le preferenze sono:

- Dire di no e andare è la cosa migliore;
- Dire di s ì e andare è la seconda opzione;
- Dire di no e non andare è la terza opzione;
- Dire di s ì e non andare è la quarta opzione.

Descrivere il gioco in forma estesa assegnando utilit à ai vari esiti.


I
si
no
II
II
si
no
si
no
III
III
III
III
si
no
si
no
si
no
si
no
3 3 3
3 3 4
3 4 3
1 2 2
4 3 3
2 1 2
2 2 1
2 2 2


I
si
no
II
II
si
no
si
no
III
III
III
III
si
no
si
no
si
no
si
no
3 3 3
3 3 4
3 4 3
1 2 2
4 3 3
2 1 2
2 2 1
2 2 2

INFORMAZIONE PERFETTA

Un gioco descritto tramite una successione finita di mosse (finito) si dice a informazione perfetta se lo stato del gioco è noto (pubblico) a tutti i giocatori dopo ogni mossa.

Attenzione a non confondere il concetto di informazione perfetta con quello di informazione completa.

TEOREMA DI ZERMELO-KUHN

E. Zermelo, Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels, Proc. Fifth Congress Mathematicians, (Cambridge 1912), Cambridge University Press 1913, 501-504.

Kuhn, Harold W. (1953), Extensive Games and the Problem of Information, in H. W. Kuhn and A. W. Tucker (eds.), Contributions to the Theory of Games, Volume II, Princeton University Press, Princeton.

Un gioco in forma estesa a informazione perfetta ha un equilibrio che si ottiene per induzione a ritroso (vedremo poi che questo è un equilibrio di Nash).

SCACCHI

Il gioco degli scacchi si riduce all'albero (gigantesco, ma finito) che comprende tutte le possibili mosse di tutte le possibili partite:
il primo livello consiste delle 20 possibili aperture del bianco;
il secondo livello delle 20 possibili aperture del nero in risposta a ciascuna apertura del bianco, cioè dei 400 possibili scambi di apertura;
ogni livello si ottiene dal precedente aggiungendo a ciascun nodo tutte le possibili risposte.
Ciascun ramo dell'albero è finito, e descrive una partita che finisce o in una vittoria del bianco, o in una vittoria del nero, o in una patta.

IL TEOREMA SUGLI SCACCHI

Al Congresso Internazionale dei Matematici del 1912 Ernst Zermelo notò che il gioco degli scacchi è determinato, nel senso seguente: o esiste una strategia che permette al bianco di vincere sempre, o esiste una strategia che permette al nero di vincere sempre, o esiste una strategia che permette a entrambi i giocatori di pattare sempre (affermazione ben più forte di quella, ovvia, che in ogni partita o il bianco vince, o il nero vince, o i due pattano).
Nel 1953 Kuhn generalizzò il risultato a tutti i giochi in forma estesa a informazione perfetta.

“DECISORI RAZIONALI INTERAGENTI” di Fioravante Patrone, edizioni PLUS, Pisa 2006

MOSSE CONTEMPORANEE E MOSSE DEL CASO

Per descrivere i giochi in forma estesa ci restano ancora due problemi:

- Come descrivere il caso di mosse contemporanee?
- Come descrivere la situazione in cui ci sono “mosse del caso"?

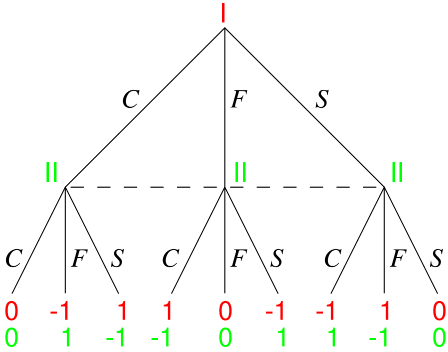
LA MORRA CINESE

- Si gioca in due.
- Ciascun giocatore deve dichiarare contemporaneamente all'altro una delle seguenti mosse:

  Carta, Forbice, Sasso.

- Forbice vince su Carta;
- Carta vince su Sasso;
- Sasso vince su Forbice.
- Se entrambi giocano la stessa cosa la partita è pari.

LA MORRA CINESE IN FORMA ESTESA



Si tratta di un gioco a informazione imperfetta, perché le mosse sono contemporanee (qui abbiamo scritto il gioco con i valori di utilità convenzionali per i due giocatori: 1 per la vittoria, 0 per il pareggio e -1 per la sconfitta).

UN POKER SEMPLIFICATO

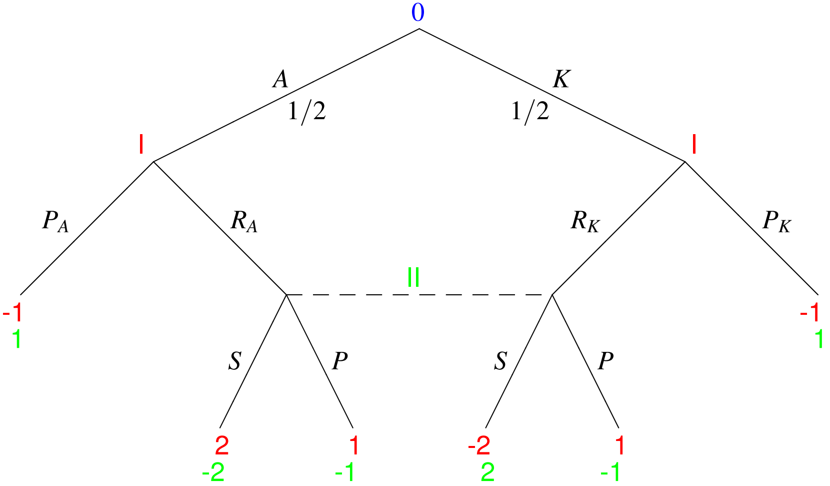
C'è un mazzo con sole due carte: A e K. A è la carta "alta" (cioè quella che vince) e K è la carta bassa.
Il mazzo viene accuratamente mescolato; il gioco inizia con I che estrae una carta dal mazzo coperto e la guarda. Può fare due cose:

- **passare**, nel qual caso lui deve dare 1 euro a II;
- **rilanciare** (a 2 euro).

Se I ha passato, il gioco è finito. Se ha rilanciato, tocca a II, il quale può:

- **passare**, nel qual caso è lui che deve dare 1 euro a I;
- **vedere**, nel qual caso I deve mostrare la sua carta e
  - se I ha la carta "alta", cioè A, II deve dare 2 euro a I;
  - se I ha la carta "bassa", cioè K, I deve dare 2 euro a II.

IL POKER SEMPLIFICATO IN FORMA ESTESA



ESERCIZIO:la roulette russa

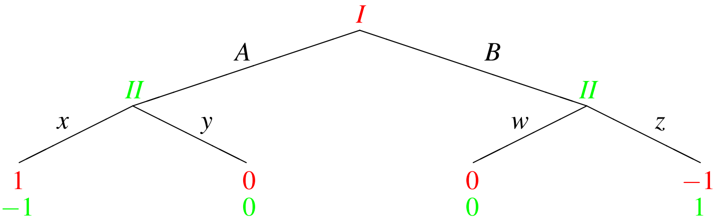
Ci sono due giocatori, ciascuno con una pistola e sei colpi. In ogni pistola c ’ è un solo proiettile.

- i giocatori mettono un euro sul piatto per poter giocare;
- Il giocatore I decide se giocare o ritirarsi, se si ritira aggiunge 2 euro al piatto, se non si ritira deve spararsi con la pistola che ha un solo proiettile su 6
- Nel caso il giocatore I sopravviva al primo stadio, il giocatore II ha le stesse opzioni;
- Se entrambi sono vivi alla fine, si dividono il piatto, se uno è morto l’altro si prende il piatto

MOSSE E STRATEGIE

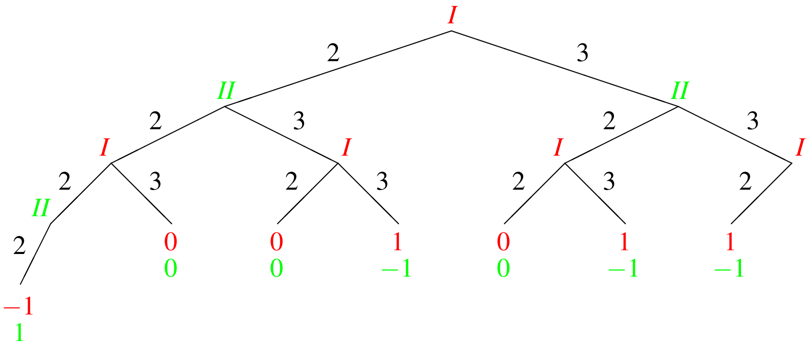
Una strategia di un giocatore è un completo piano d'azione. Esso specifica un'azione ammissibile del giocatore per ciascuna circostanza in cui il giocatore può essere chiamato ad agire.
Un profilo di strategie (talvolta chiamato anche combinazione di strategie) è un insieme di strategie per ogni giocatore che specifica interamente tutte le azioni in un gioco. Un profilo di strategie deve contenere una e una sola strategia per ogni giocatore.
Il concetto di strategia è talvolta (erroneamente) confuso con quello di mossa. Una mossa è un'azione intrapresa da un giocatore ad un certo punto durante la riproduzione di un gioco (ad esempio, negli scacchi, il bianco sposta il cavallo da b1 in c3). Una strategia è invece un algoritmo per giocare il gioco, nel quale un giocatore dice che cosa fare per ogni possibile situazione in tutta la partita.(Wikipedia)

FORMA ESTESA E FORMA STRATEGICA



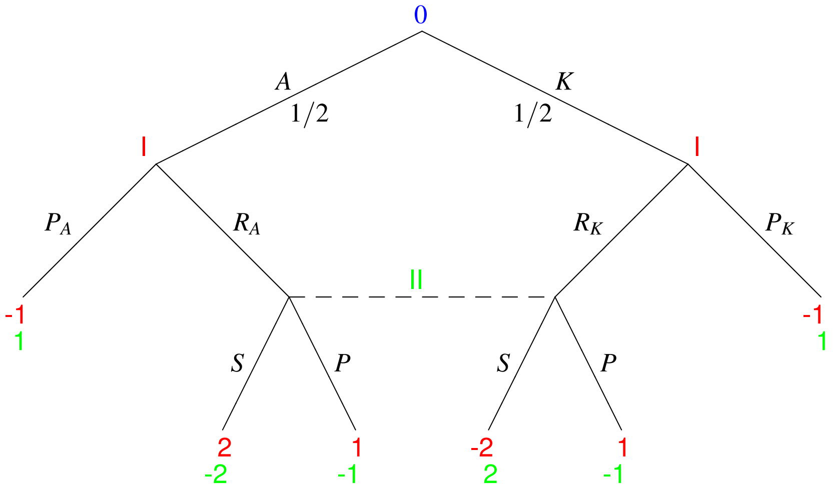
II \ I	$(x;w)$	$(y;w)$	$(x;z)$	$(y;z)$
A	(1,-1)	(0, 0)	(1,-1)	(0, 0)
B	(0, 0)	(0, 0)	(-1,1)	(-1,1)

IL GIOCO DELL'OTTO (IN "FORMA ESTESA")



I \ II	(2;2)	(2;3)	(3;2)	(3;3)
(2,(2;2;2))	(-1, 1)	(-1, 1)	(0, 0)	(0, 0)
(2,(2;2;3))	(-1, 1)	(-1, 1)	(0, 0)	(0, 0)
(2,(2;3;2))	(-1, 1)	(-1, 1)	(1,-1)	(1,-1)
(2,(2;3;3))	(-1, 1)	(-1, 1)	(1,-1)	(1,-1)
(2,(3;2;2))	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
(2,(3;2;3))	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
(2,(3;3;2))	(0, 0)	(0, 0)	(1,-1)	(1,-1)
(2,(3;3;3))	(0, 0)	(0, 0)	(1,-1)	(1,-1)
(3,(2;2;2))	(0, 0)	(0, 0)	(1,-1)	(1,-1)
(3,(2;2;3))	(1,-1)	(1,-1)	(1,-1)	(1,-1)
(3,(2;3;2))	(0, 0)	(0, 0)	(1,-1)	(1,-1)
(3,(2;3;3))	(1,-1)	(1,-1)	(1,-1)	(1,-1)
(3,(3;2;2))	(0, 0)	(0, 0)	(1,-1)	(1,-1)
(3,(3;2;3))	(1,-1)	(1,-1)	(1,-1)	(1,-1)
(3,(3;3;2))	(0, 0)	(0, 0)	(1, 1)	(1,-1)
(3,(3;3;3))	(1,-1)	(1,-1)	(1,-1)	(1,-1)

IL POKER SEMPLIFICATO IN FORMA ESTESA



IL POKER SEMPLIFICATO IN FORMA STRATEGICA

I \ II	P	S
$R_A R_K$	(1, -1)	(0,0)
$R_A P_K$	(0,0)	(1/2, -1/2)
$P_A P_K$	(-1, 1)	(-1,1)
$P_A R_K$	(0, 0)	(-3/2,3/2)

SOMMA ZERO

Un gioco non cooperativo a due giocatori si dice

A SOMMA ZERO

se per ogni esito del gioco la somma delle utilità dei due giocatori è 0
Ciò significa che i due giocatori sono completamente antagonisti.
Von Neumann e Morgenstern si sono occupati solo di giochio a somma zero.

UN TENTATIVO DI SOLUZIONE: IL MASSIMO OMBRA

Dato un gioco in forma strategica con due giocatori

$$(X, Y, f, g)$$

chiamiamo massimo ombra una coppia di strategie $(\bar{x}, \bar{y})$ tale che

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, y), \qquad g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(x, y)$$

per ogni $x \in X, \quad y \in Y$

IL MASSIMO OMBRA IN DIFFICOLTA’: UN GIOCO DI COORDINAMENTO

I \ II	L	R
T	5,5	0,0
B	0,0	5,5

Nemmeno l’esistenza del massimo ombra assicura una soluzione soddisfacente: basta considerare questo “gioco di puro coordinamento”, in cui non c’è divergenza di interessi, ma solo difficoltà di coordinamento. Se i due giocatori hanno la possibilità di comunicare prima di entrare nella stanza e schiacciare il bottone è possibile confluire in un massimo ombra, altrimenti no.

BIBLIOGRAFIA PICCOLA

- Myerson "Game Theory: Analysis of Conflict", Harvard University Press (1991).
- Patrone "Decisori (razionali) interagenti. Una introduzione alla teoria dei giochi", PLUS (2006)
- Owen "Game Theory", Academic Press, New York (1995)
- Luce, Raiffa , "Games and Decisions", Wiley, New York (1957).

STRATEGIA DEBOLMENTE DOMINANTE

Dato un gioco a due giocatori in forma strategica

$$(X, Y, f, g),$$

se per un certo $\bar{x}$ e un certo x^*

$$f(\bar{x}, y) \geq f(x^*, y)$$

per ogni $y \in Y$ e per almeno un $\bar{y}$ si ha

$$f(\bar{x}, \bar{y}) > f(x^*, \bar{y})$$

,
diciamo che $\bar{x}$ domina debolmente x^*.
Se $\bar{x}$, domina x^* possiamo supporre che il giocatore I non giocherà x^*.

STRATEGIA FORTEMENTE DOMINANTE

Dato un gioco a due giocatori in forma strategica

$$(X, Y, f, g),$$

se per un certo $\bar{x}$ e un certo x^*

$$f(\bar{x}, y) > f(x^*, y)$$

per ogni $y \in Y$ diciamo che $\bar{x}$ domina fortemente x^*.
Se $\bar{x}$, domina x^* possiamo supporre che il giocatore I non giocherà x^*.

ELIMINAZIONE ITERATA DI STRATEGIE FORTEMENTE DOMINATE: SUCCESSI

I \ II	x	y	z
A	(2, 1)	(1, 3)	(0, 1)
B	(3, 0)	(2, 2)	(1, 3)
C	(1, 1)	(4,-1)	(-1, 0)
D	(2, 4)	(0, 0)	(-1, 3)

ELIMINAZIONE ITERATA DI STRATEGIE FORTEMENTE DOMINATE: SUCCESSI

I \ II	x	y	z
B	(3, 0)	(2, 2)	(1, 3)
C	(1, 1)	(4,-1)	(-1, 0)

Sopravvive (B, z)

ELIMINAZIONE ITERATA
DI STRATEGIE FORTEMENTE DOMINATE: LIMITI

I \ II	x	y	z
A	(2, 1)	(1, 3)	(0, 1)
B	(3, 0)	(2, 2)	(1, 3)
C	(1, 1)	(4,-1)	(2, 0)
D	(2, 4)	(0, 0)	(-1, 3)

ELIMINAZIONE ITERATA
DI STRATEGIE FORTEMENTE DOMINATE: LIMITI

I \ II	x	z
B	(3, 0)	(1, 3)
C	(1, 1)	(2,0)

EQUILIBRIO DI NASH

Consideriamo il gioco:

$(X,\ Y,\ f,\ g:\ X \times Y \to \mathbf{R})$

dove X e Y sono gli spazi di strategie, e f, g sono le funzioni di utilità dei giocatori

$(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ si dice equilibrio di Nash se

1. $f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}) \quad \forall x \in X$;
2. $g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y) \quad \forall y \in Y$.

DILEMMA DEL PRIGIONIERO

I \ II	S	T
S	(5, 5)	(0, 6)
T	(6, 0)	(1, 1)

Punto di vista di I:

I \ II	S	T
S	(5)	(0)
T	(6)	(1)

Punto di vista di II:

I \ II	S	T
S	(5)	(6)
T	(0)	(1)

La soluzione è: i giocatori giocano entrambi T e prendono 1 ciascuno, ma il risultato è inefficiente.

Adamo Smith

“Non è della benevolenza del macellaio, del birraio, del fornaio che ci aspettiamo il nostro desinare, bensì dal riguardo che essi hanno del proprio interesse. Noi ci indirizziamo non al loro umanitarismo, ma al loro egoismo e non parliamo con essi delle nostre necessità, ma dei loro vantaggi. L ’individuo è condotto da una mano invisibile a promuovere un fine che non entrava nelle sue intenzioni”.
(La ricchezza delle nazioni)
Adam Smith (Kirkcaldy, 5 giugno 1723 , Edimburgo, 17 luglio 1790),