



Esercizi

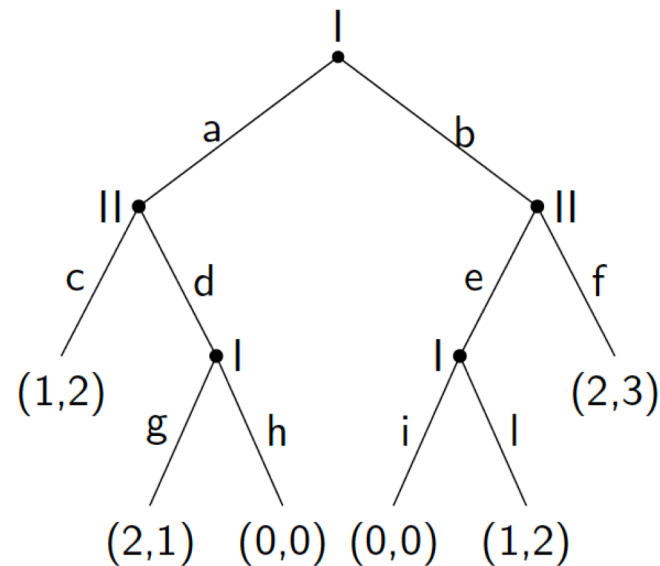
Monica Salvioli

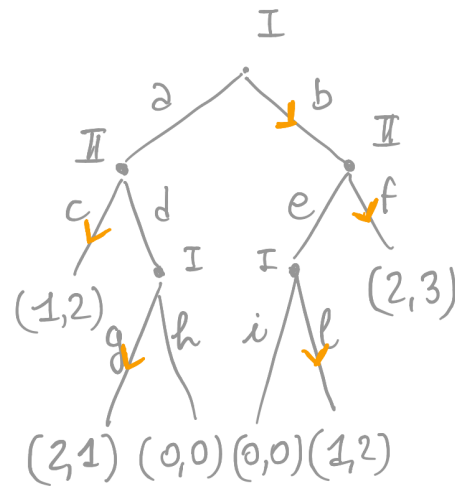
monica.salvioli@polimi.it

23 Marzo 2022

Esercizio 1

Elencare le strategie dei giocatori nel seguente gioco in forma estesa e applicare l'induzione a ritroso.





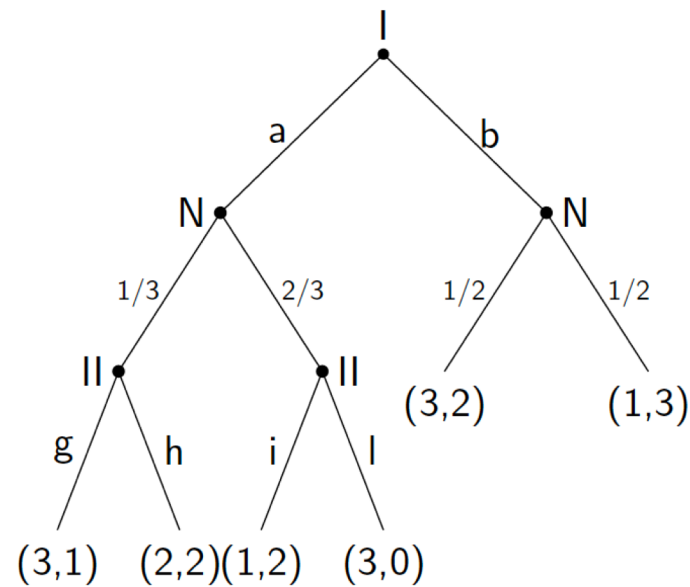
8 strategie per il giocatore I
 $\{agi, ahi, agl, ahl, bgi, bhi, bgl, bhe\}$

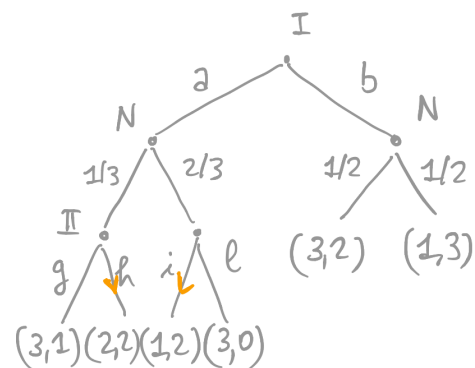
4 strategie per il giocatore II
 $\{ce, cf, de, df\}$

Applicando l'induzione a ritroso trovo come risultato (2,3), che corrisponde alla strategia bgl per il giocatore I e alla strategia cf per il giocatore II.

Esercizio 2

Elencare le strategie dei giocatori nel seguente gioco in forma estesa e applicare l'induzione a ritroso.





2 strategie per il
giocatore I $\{a, b\}$

4 strategie per il
giocatore II
 $\{gi, gl, hi, hl\}$

Utilità attese

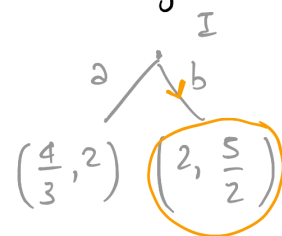
$$u_I(a, hi) = \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}$$

$$u_{II}(a, hi) = \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{6}{3} = 2$$

$$u_I(b, hi) = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 2$$

$$u_{II}(b, hi) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{5}{2}$$

Quindi il gioco diventa:



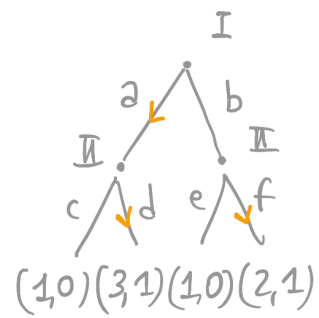
il risultato atteso è $(2, \frac{5}{2})$
e le strategie ottimali sono
 b e hi .

Esercizio 3

Fare un esempio di un gioco in forma estesa a informazione perfetta in cui il giocatore I ha due strategie ($\{A, B\}$) e il giocatore II ne ha 4 ($\{X, Y, W, Z\}$).

Scrivere i payoff in modo che l'unica coppia di strategie ottimali sia A, Y .

Un esempio:



$$X = ce$$

$$Y = df$$

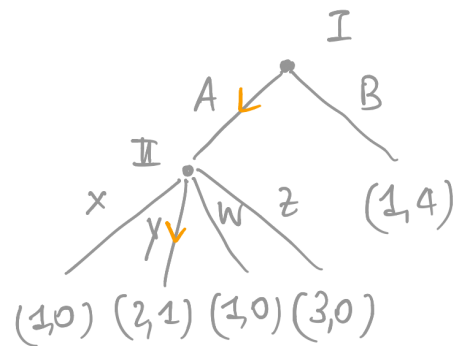
$$W = de$$

$$Z = cf$$

$$A = a$$

$$B = b$$

Oppure:



Esercizio 4: Re Salomone

Due donne si contendono un figlio: entrambe dichiarano di essere la madre. Salomone propone di tagliare il figlio a metà. Inorridita, la vera madre decide di rinunciare al figlio.

Esiste un altro modo per capire chi è la vera madre senza minacciare di tagliare il figlio a metà?

Esercizio 4: Re Salomone

Due donne si contendono un figlio: entrambe dichiarano di essere la madre. Salomone propone di tagliare il figlio a metà. Inorridita, la vera madre decide di rinunciare al figlio.

Esiste un altro modo per capire chi è la vera madre senza minacciare di tagliare il figlio a metà?

Supponiamo che il valore del figlio sia x per la vera madre e y per l'altra donna, con $x > y$.

Una delle due donne deve dire «MIO» oppure «SUO». Se dice «SUO» il gioco finisce e l'altra donna prende il figlio. Se dice «MIO» il gioco continua e l'altra donna deve dire «D'ACCORDO» oppure «NON D'ACCORDO». Se dice «D'ACCORDO», la prima donna terrà il figlio. Se dice «NON D'ACCORDO» pagherà una penalità $y < p < x$ ma avrà il figlio, mentre la prima donna pagherà comunque una penalità $q > 0$.

Verificare che in questo modo la vera madre terrà il figlio.

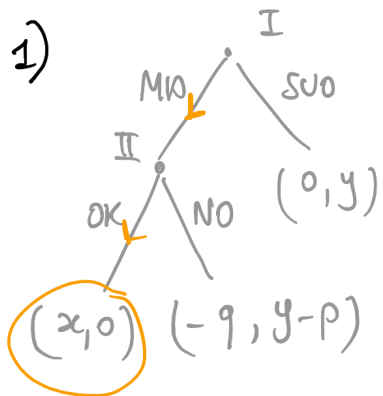
Abbiamo due casi

- 1) il giocatore I è la vera madre
- 2) il giocatore II è la vera madre

x : valore del figlio per la vera madre
 y : valore del figlio per l'altra donna

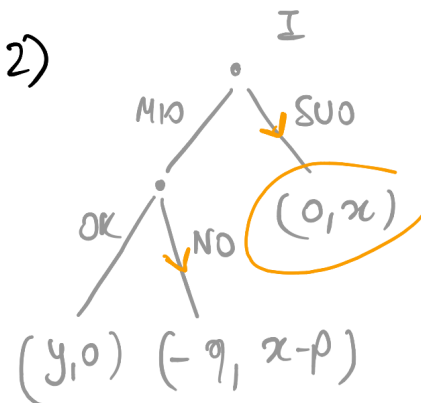
$$x > y$$

$$y < p < x, \quad q > 0$$



Il risultato del gioco è $(x, 0)$: 2)

la vera madre ottiene il figlio.



Il risultato del gioco è $(0, x)$:

la vera madre ottiene il figlio.

Esercizio 5

Consideriamo il seguente gioco in forma strategica.

$$\begin{pmatrix} (1, 2) & (1, 3) \\ (0, 2) & (a, b) \end{pmatrix}$$

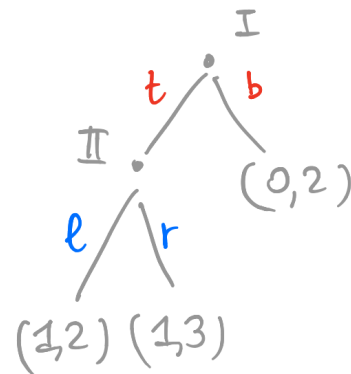
Come devono essere a e b perché il gioco sia rappresentabile come un gioco in forma estesa con informazione perfetta?

$$\begin{array}{c} \text{t} \\ \text{b} \end{array} \begin{array}{cc} \text{l} & \text{r} \\ \left(\begin{array}{cc} (1,2) & (1,3) \\ (0,2) & (a,b) \end{array} \right) \end{array}$$

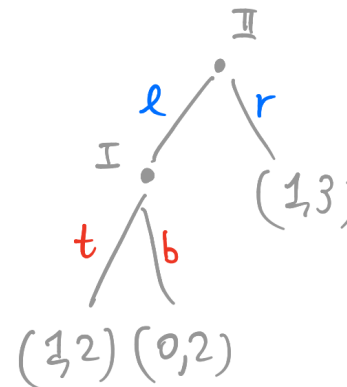
Come devono essere a e b perché il gioco sia rappresentabile come un gioco in forma estesa con informazione perfetta?

Due possibilità:

$$(a,b) = (0,2)$$



$$(a,b) = (1,3)$$

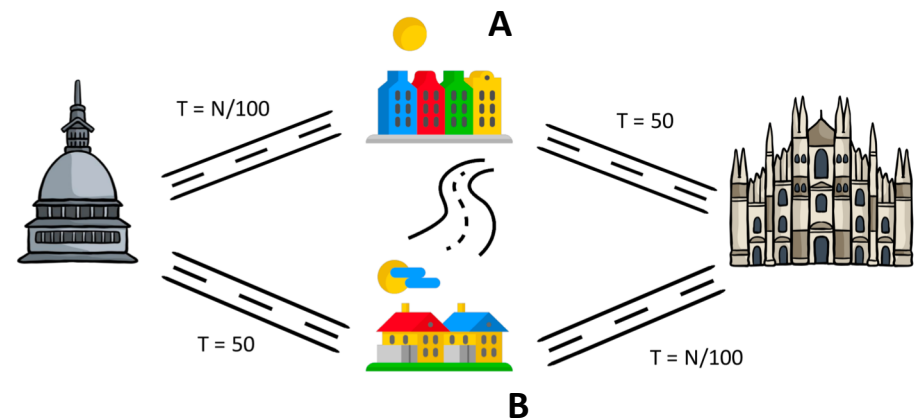


Esercizio 6: Il paradosso di Braess

Ogni mattina 4000 persone devono spostarsi da Torino verso Milano per motivi di lavoro. A metà strada tra le due città si trovano due paesi, A e B, e ci sono due percorsi alternativi, ognuno dei quali attraversa uno dei due paesi. Tra Torino e A e tra B e Milano ci sono due tratti di strada provinciale, i cui tempi di percorrenza risentono fortemente del traffico: se ci sono N veicoli che stanno utilizzando quel tratto di strada, il tempo di percorrenza (in minuti) è $N/100$. Al contrario, tra A e Milano e tra Torino e B ci sono due tratti di una larga autostrada, in cui i tempi di percorrenza sono dettati dal sistema Tutor e quindi il tempo necessario per il viaggio è di 50 minuti, indipendentemente dal numero di auto che ci sono.

Quale strada devono percorrere gli automobilisti?

Conviene costruire percorsi alternativi?



4000 automobilisti

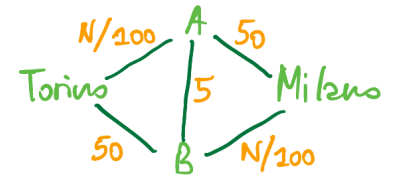
Equilibrio facile: metà passa dal paese A, metà passa da B.

La durata per tutti sarà:

$$50 + \frac{2000}{100} = 50 + 20 = 70 \text{ minuti}$$

(si può controllare che nessuno devia !!)

Conviene aggiungere delle opzioni, per esempio una strada che colleghi A e B percorribile in 5 minuti?



No, per tutti diventa una strategia dominante passare dall'autostrada e poi dalla nuova strada, ma se lo fanno tutti il tempo di percorrenza diventa

$$\frac{4000}{100} + 5 + \frac{4000}{100} = 40 + 5 + 40 = 85 \text{ minuti,}$$

cioè 15 minuti in più!

(si può controllare che nessuno devia !!)

Esercizio 7

Consideriamo il seguente gioco. Verifichiamo che risolvendo il gioco con l'eliminazione delle strategie debolmente dominate alcuni equilibri vengono eliminati.

$$\begin{pmatrix} (3, 2) & (0, 1) \\ (3, -1) & (1, 3) \\ (2, 0) & (-1, 2) \end{pmatrix}$$

Esercizio 8: El Farol bar

Un certo numero di persone, diciamo 500 per semplicità, decidono, in maniera indipendente e simultanea, se andare in un bar che oltre all'aperitivo propone musica dal vivo. Lo spazio nel bar è limitato, e la serata è piacevole solo al massimo il 60% della popolazione è presente.

(Non è possibile stabilire a priori quanti andranno al bar, per cui ognuno decide a seconda se pensa che quella sera al bar ci vadano più o meno di 300 persone.)

Che fare?



El Fard bar

In ogni equilibrio di Nash ci sono esattamente 300 persone.

- se ce ne fossero meno qualcuno tra quelli a casa potrebbe deviare (andare al bar) e garantirsi un payoff maggiore
- se ce ne fossero di più, qualcuno tra quelli nel bar potrebbe deviare (andare a casa) e garantirsi un payoff maggiore
- quando nel bar ci sono esattamente 300 persone nessuno ha incentivo a deviare.

Ci sono tanti Nash quanti sono i modi di prendere 300 persone da un insieme di 500:

$$\binom{500}{300} = \frac{500!}{300! 200!}$$

Esercizio 9

Analizzare il gioco della battaglia dei sessi in strategie miste.

		lui	
			
lei		(2, 1)	(0, 0)
		(0, 0)	(1, 2)

$$\begin{array}{c}
 p \\
 1-p
 \end{array}
 \begin{array}{cc}
 q & 1-q \\
 \left(\begin{array}{cc}
 \textcircled{2} & \textcircled{1} \\
 \textcircled{0} & \textcircled{0}
 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc}
 \textcircled{0} & \textcircled{0} \\
 \textcircled{1} & \textcircled{2}
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$f(p, q) = 2pq + 1(1-p)(1-q) = p(3q-1) - q + 1$$

La miglior risposta del giocatore I alla strategia $(q, 1-q)$ del giocatore II è

- $p=1$ se $q > \frac{1}{3}$
- $p=0$ se $q < \frac{1}{3}$
- $p \in [0, 1]$ se $q = \frac{1}{3}$

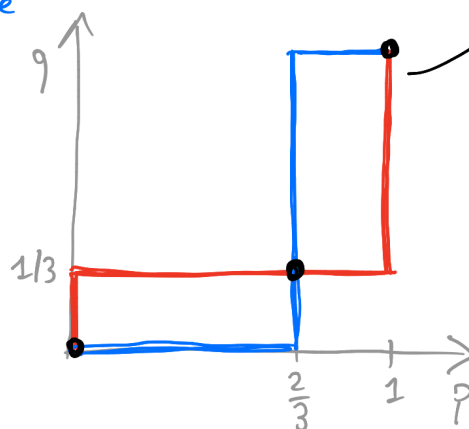
RITROVO I DUE EQUILIBRI IN PURE GIÀ VISTI E UN NUOVO EQUILIBRIO IN MISCE

$$\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \right)$$

$$g(p, q) = pq + 2(1-p)(1-q) = q(3p-2) - 2p + 2$$

La miglior risposta del giocatore II alla strategia $(p, 1-p)$ del giocatore I è

- $q=1$ se $p > \frac{2}{3}$
- $q=0$ se $p < \frac{2}{3}$
- $q \in [0, 1]$ se $p = \frac{2}{3}$



Esercizio 10: Poker semplificato

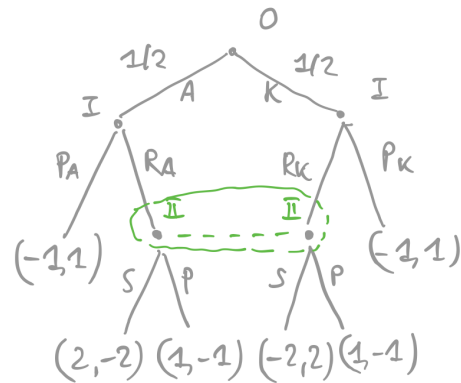
C'è un mazzo con sole due carte: A e K. A è la carta "alta" (cioè quella che vince) e K è la carta bassa. Il mazzo viene accuratamente mescolato; il gioco inizia con I che estrae una carta dal mazzo coperto e la guarda. Può fare due cose:

- **passare**, nel qual caso deve dare 1 euro a II;
- **rilanciare** (a 2 euro).

Se I ha passato, il gioco è finito. Se ha rilanciato, tocca a II, il quale può:

- **passare**, nel qual caso è lui che deve dare 1 euro a I;
- **vedere**, nel qual caso I deve mostrare la sua carta e
 - Se I ha la carta "alta", cioè A, II deve dare 2 euro a I;
 - se I ha la carta "bassa", cioè K, I deve dare 2 euro a II.

POKER SEMPLIFICATO



A: carta alta
K: carta bassa
P: passa
S: rilancia e vede

La matrice del gioco è:

		P		S	
I	R _A P _K	(0,0)		$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	
	R _A R _K	(1,-1)		(0,0)	
	P _A P _K	(-1,1)		(-1,1)	
	P _A R _K	(0,0)		$(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$	

Le ultime due righe sono strettamente dominate, quindi le elimino

		P		S	
I	R _A P _K	(0,0)		$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	
	R _A R _K	(1,-1)		(0,0)	

BLUFF

Non ci sono equilibri in strategie pure.
Vediamo in miste:

$$f(p, q) = \frac{1}{2} p(1-q) + 1(1-p)q = p(-\frac{3}{2}q + \frac{1}{2}) + q$$

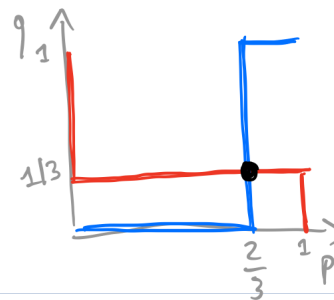
La miglior risposta del giocatore I alla strategia $(q, 1-q)$ del secondo è

- $p=1$ se $q < \frac{1}{3}$
- $p=0$ se $q > \frac{1}{3}$
- $p \in [0,1]$ se $q = \frac{1}{3}$

$$g(p, q) = -\frac{1}{2} p(1-q) - 1(1-p)q = q(\frac{3}{2}p - 1) - \frac{1}{2}p$$

La miglior risposta del giocatore II alla strategia $(p, 1-p)$ del primo è:

- $q=1$ se $p > \frac{2}{3}$
- $q=0$ se $p < \frac{2}{3}$
- $q \in [0,1]$ se $p = \frac{2}{3}$



L'equilibrio in miste è $p = \frac{2}{3}$, $q = \frac{1}{3}$. Al giocatore I conviene bluffare $\frac{1}{3}$ delle volte $(1-p)$, non di più non di meno.

Esercizio 11: Falchi e colombe



Due animali di una stessa specie si contendono la conquista di una preda. Assumiamo che l'utilità di conquistare la preda sia 1.

Consideriamo due strategie:

- Aggressiva (falco)
- Non aggressiva (colomba)

Se entrambi si comportano da colombe si divideranno la preda ottenendo $\frac{1}{2}$ ciascuno. Se uno si comporta da falco e uno da colomba, il primo prende 1 e il secondo 0. Se entrambi si comportano da falco prenderanno ciascuno $\frac{1}{2} - c$ dove c è il costo del combattimento.

Trovare gli equilibri evolutivamente stabili (in strategie pure) al variare di c .