

Giochi evolutivi

Monica Salvioli

30 Marzo 2021

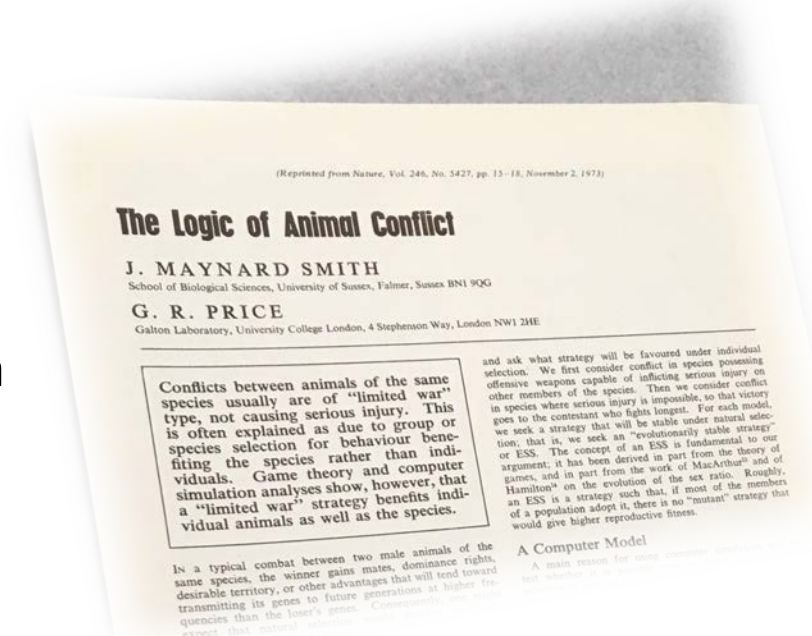


Teoria dei giochi evolutivi: idea

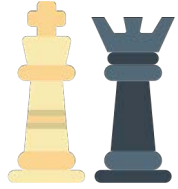
- L'idea è quella di applicare i principi della teoria dei giochi che abbiamo visto finora a situazioni in cui gli individui non sono apertamente razionali o non prendono decisioni esplicitamente/ in modo consapevole.
- Gli agenti che consideriamo possono adottare diversi comportamenti
- Ci interessa capire quali di questi comportamenti hanno le caratteristiche necessarie per mantenersi nella popolazione e quali invece tendono a essere sostituiti da altri.

Teoria dei giochi evolutivi: storia

- Introdotta nel 1973 nell'ambito della biologia dell'evoluzione da John Maynard Smith e George R. Price
- La biologia evolutiva assume che:
 - i geni di un organismo determinano le sue caratteristiche osservabili e di conseguenza la sua **fitness** in un certo ambiente
 - gli organismi più “fit” generano una prole più numerosa; questo fa sì che quei geni associati a una maggiore fitness diventino sempre più rappresentati
- Molte situazioni comportano l'interazione di più organismi in una popolazione, e il successo di ciascun organismo dipende da come interagisce con gli altri



Dove è il gioco?



GIOCATORI

Non abbiamo giocatori individuali
ma “categorie”



PAYOFF

La fitness è il payoff: dipende dalle strategie
(caratteristiche, tipi) degli organismi coinvolti



STRATEGIE

Le caratteristiche e i comportamenti di un
organismo sono come le strategie

Soluzioni: ESS

- Le soluzioni “migliori” nell’ambito dei giochi evolutivi coincidono col risultato della selezione naturale
- Le chiamiamo **strategie evolutivamente stabili (ESS)**
- Sono strategie che, una volta diffuse nella popolazione, tendono a persistere e non possono essere rimpiazzate da strategie rare che compaiono casualmente
- Un **equilibrio evolutivamente stabile** può essere composto sia da strategie pure che da strategie miste

Esempio 1



- Consideriamo una specie di maggiolini e supponiamo che la fitness di ogni individuo sia determinata principalmente dalla possibilità di procurarsi cibo e di utilizzare i nutrienti in modo efficace.
- La popolazione è costituita da individui piccoli ma molto abili ad estrarre i nutrienti.
- Supponiamo che compaia una certa mutazione, per cui gli individui che la possiedono sono più grossi e meno efficienti nell'estrazione dei nutrienti ma più forti nella contesa per il cibo
- Nella popolazione avremo quindi 2 strategie:
 - **piccolo**
 - **GRANDE**
- I due tipi competono tra loro nella ricerca di cibo e possiamo immaginare che quelli più grandi abbiano la meglio.

Esempio 1



	piccolo	GRANDE
piccolo	(5, 5)	(1, 8)
GRANDE	(8, 1)	(3, 3)

Interazioni:

- Quando a competere sono due tipi della stessa grandezza, si dividono le risorse disponibili
- Quando un tipo grande compete con un piccolo, il grande prende la maggior parte delle risorse
- A parità di cibo, il guadagno in termini di fitness è minore per i tipi grandi, dal momento che il loro metabolismo è più dispendioso.

Esempio 1

- Cerchiamo una strategia evolutivamente stabile. Se tutta la popolazione utilizza questa strategia, allora qualsiasi piccolo gruppo di individui che utilizza una strategia diversa non riuscirà a sostituirsi agli altri
- Se tutta la popolazione utilizza una strategia b^* , allora ogni piccolo gruppo che utilizza una strategia diversa, b , deve avere una fitness strettamente minore rispetto a quella degli individui che usano b^*
- Immaginiamo che una piccola frazione della popolazione, ε , utilizzi una strategia b , mentre la maggior parte della popolazione ($1 - \varepsilon$) utilizza la strategia b^*
- Vediamo se nel caso dei maggiolini le strategie “piccolo” e “grande” sono evolutivamente stabili

Esempio 1

- Supponiamo che una piccola frazione ε della popolazione utilizzi la strategia “**GRANDE**” e $(1 - \varepsilon)$ utilizzi la strategia “**piccolo**”: siamo nel caso in cui i maggiolini grandi invadono i piccoli. Vogliamo capire se i piccoli possono resistere.

	piccolo	GRANDE
piccolo	5	1

Esempio 1

- Supponiamo che una piccola frazione ε della popolazione utilizzi la strategia “**GRANDE**” e $(1 - \varepsilon)$ utilizzi la strategia “**piccolo**”: siamo nel caso in cui i maggiolini grandi invadono i piccoli. Vogliamo capire se i piccoli possono resistere.
- Quale è il payoff atteso di un maggiolino piccolo nelle sue interazioni con gli altri individui della popolazione?

	piccolo	GRANDE
piccolo	5	1

Esempio 1

- Supponiamo che una piccola frazione ε della popolazione utilizzi la strategia “**GRANDE**” e $(1 - \varepsilon)$ utilizzi la strategia “**piccolo**”: siamo nel caso in cui i maggiolini grandi invadono i piccoli. Vogliamo capire se i piccoli possono resistere.
- Quale è il payoff atteso di un maggiolino piccolo nelle sue interazioni con gli altri individui della popolazione?
- Con probabilità $(1 - \varepsilon)$ incontrerà un individuo piccolo ricevendo un payoff pari a 5, mentre con probabilità ε incontrerà un individuo grande ricevendo un payoff pari a 1.
- Quindi il suo payoff atteso è $5 \cdot (1 - \varepsilon) + 1 \cdot \varepsilon = 5 - 4\varepsilon$

	piccolo	GRANDE
piccolo	5	1

Esempio 1

- Quale è invece il payoff atteso di un maggiolino grande nelle sue interazioni con gli altri individui della popolazione?

	piccolo	GRANDE
GRANDE	8	3

Esempio 1

- Quale è invece il payoff atteso di un maggiolino grande nelle sue interazioni con gli altri individui della popolazione?
- Con probabilità $(1 - \varepsilon)$ incontrerà un individuo piccolo ricevendo un payoff pari a 8, mentre con probabilità ε incontrerà un altro individuo grande ricevendo un payoff pari a 3. Quindi il suo payoff atteso è $8 \cdot (1 - \varepsilon) + 3 \cdot \varepsilon = 8 - 5 \cdot \varepsilon$

	piccolo	GRANDE
GRANDE	8	3

Esempio 1

- Quale è invece il payoff atteso di un maggiolino grande nelle sue interazioni con gli altri individui della popolazione?
- Con probabilità $(1 - \varepsilon)$ incontrerà un individuo piccolo ricevendo un payoff pari a 8, mentre con probabilità ε incontrerà un altro individuo grande ricevendo un payoff pari a 3. Quindi il suo payoff atteso è $8 \cdot (1 - \varepsilon) + 3 \cdot \varepsilon = 8 - 5 \cdot \varepsilon$
- La strategia “**piccolo**” non è evolutivamente stabile perché

$$5 - 4 \cdot \varepsilon > 8 - 5 \cdot \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon > 3$$

che è impossibile. I maggiolini piccoli si estingueranno!

	piccolo	GRANDE
GRANDE	8	3

Esempio 1

- Vediamo invece se la strategia «grande» è evolutivamente stabile. Supponiamo allora che una piccola frazione della popolazione ε utilizzi la strategia “**piccolo**” e $(1 - \varepsilon)$ utilizzi la strategia “**GRANDE**”: siamo nel caso in cui i maggiolini piccoli invadono i grandi.
- Vogliamo capire se i grandi possono resistere all’invasione.
- Quale è il payoff atteso di un maggiolino **GRANDE** nelle sue interazioni con gli altri individui della popolazione?
- Con probabilità $(1 - \varepsilon)$ incontrerà un individuo grande ricevendo un payoff pari a 3, mentre con probabilità ε incontrerà un individuo piccolo ricevendo un payoff pari a 8.
- Quindi il suo payoff atteso è $3 \cdot (1 - \varepsilon) + 8 \cdot \varepsilon = 3 + 5\varepsilon$

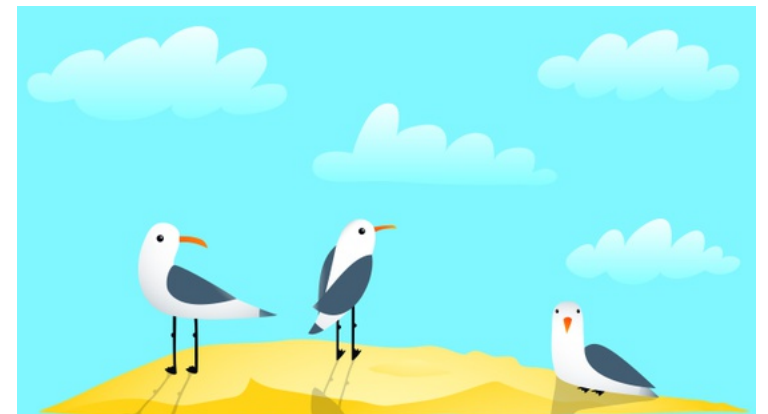
	piccolo	GRANDE
GRANDE	8	3

Esempio 1

- Quale è invece il payoff atteso di un maggiolino **piccolo** nelle sue interazioni con gli altri individui della popolazione?
- Con probabilità $(1 - \varepsilon)$ incontrerà un individuo grande ricevendo un payoff pari a 1, mentre con probabilità ε incontrerà un individuo piccolo ricevendo un payoff pari a 5.
- Quindi il suo payoff atteso è $1 \cdot (1 - \varepsilon) + 5 \cdot \varepsilon = 1 + 4\varepsilon$
- In questo caso la fitness attesa di un maggiolino grande è sempre più grande della fitness attesa di un maggiolino piccolo, e questo vale per ogni ε .
- Quindi la strategia “**GRANDE**” è evolutivamente stabile.

Esempio 2

- Un gabbiano ha due possibili strategie per procurarsi il pesce:
 - pescarlo (**P**)
 - rubarlo a un altro gabbiano (**R**)
- Se tutti adottassero la strategia R non ci sarebbero pesci da rubare
- Se in molti adottano la strategia P, allora rubare diventa conveniente perché meno faticoso
- In questo caso ci aspettiamo di osservare entrambi i comportamenti in una popolazione
- Vari fattori esterni entrano in gioco (quanti pesci ci sono, quanti gabbiani ci sono...)



Esempio 2

- Guardiamo al caso in cui un gabbiano che pesca incontra un gabbiano che ruba
- Il caso in cui un gabbiano che ruba incontra uno che pesca è analogo, quindi le funzioni di utilità devono coincidere!

	P	R
P	$(f(P, P), g(P, P))$	$(f(P, R), g(\mathbf{P}, \mathbf{R}))$
R	$(\mathbf{f}(\mathbf{R}, \mathbf{P}), g(R, P))$	$(f(R, R), g(R, R))$

Esempio 2

- Guardiamo al caso in cui un gabbiano che pesca incontra un gabbiano che ruba
- Il caso in cui un gabbiano che ruba incontra uno che pesca è analogo, quindi le funzioni di utilità devono coincidere!
- $f(R, P) = g(P, R) = h(R, P)$ e il gioco è simmetrico

	P	R
P	$(h(P, P), h(P, P))$	$(h(P, R), h(R, P))$
R	$(h(R, P), h(P, R))$	$(h(R, R), h(R, R))$

Esempio 2

	P	R
P	$(h(P, P), h(P, P))$	$(h(P, R), h(R, P))$
R	$(h(R, P), h(P, R))$	$(h(R, R), h(R, R))$

- Guardiamo al caso in cui un gabbiano che pesca incontra un gabbiano che ruba
- Il caso in cui un gabbiano che ruba incontra uno che pesca è analogo, quindi le funzioni di utilità devono coincidere!
- $f(R, P) = g(P, R) = h(R, P)$ e il gioco è simmetrico

Definizione: Un gioco non cooperativo a due giocatori in forma strategica si dice simmetrico se esiste una funzione h tale che

$$f(x, y) = h(x, y) \text{ e } g(x, y) = h(y, x)$$

Nota: In un gioco simmetrico gli spazi di strategie dei due giocatori sono gli stessi: $X = Y$

Considerazioni

- Sia ε la probabilità del mutante (frequenza relativa)
- L'utilità attesa del non mutante b^* è: $u(b^*) = (1 - \varepsilon) h(b^*, b^*) + \varepsilon h(b^*, b)$
- L'utilità attesa del mutante b è: $u(b) = (1 - \varepsilon) h(b, b^*) + \varepsilon h(b, b)$
- La strategia b^* è evolutivamente stabile se e solo se $u(b) < u(b^*)$ per ogni strategia b e per ogni ε sufficientemente piccolo

Considerazioni

- Dunque deve esistere un numero δ tale che per ogni $\varepsilon < \delta$ si abbia

$$u(b) = (1 - \varepsilon) h(b, b^*) + \varepsilon h(b, b) < u(b^*) = (1 - \varepsilon) h(b^*, b^*) + \varepsilon h(b^*, b),$$

Considerazioni

- Dunque deve esistere un numero δ tale che per ogni $\varepsilon < \delta$ si abbia

$$u(b) = (1 - \varepsilon) h(b, b^*) + \varepsilon h(b, b) < u(b^*) = (1 - \varepsilon) h(b^*, b^*) + \varepsilon h(b^*, b),$$

da cui, passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$

$$h(b, b^*) \leq h(b^*, b^*) \text{ per ogni } b$$

Considerazioni

- Dunque deve esistere un numero δ tale che per ogni $\varepsilon < \delta$ si abbia

$$u(b) = (1 - \varepsilon) h(b, b^*) + \varepsilon h(b, b) < u(b^*) = (1 - \varepsilon) h(b^*, b^*) + \varepsilon h(b^*, b),$$

da cui, passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$

$$h(b, b^*) \leq h(b^*, b^*) \text{ per ogni } b$$

che è la definizione di **equilibrio di Nash**!

Una ESS deve essere un equilibrio di Nash...ma non basta!



Considerazioni

- Infatti, se per qualche b vale

$$h(b, b^*) = h(b^*, b^*)$$

allora la condizione di partenza diventa:

$$\varepsilon h(b, b) < \varepsilon h(b^*, b),$$

da cui:

$$h(b, b) < h(b^*, b).$$

Cosa significa?

Considerazioni

- Infatti, se per qualche b vale

$$h(b, b^*) = h(b^*, b^*)$$

allora la condizione di partenza diventa:

$$\varepsilon h(b, b) < \varepsilon h(b^*, b),$$

da cui:

$$h(b, b) < h(b^*, b).$$

Cosa significa?

Che se l'equilibrio di Nash è debole, due mutanti (strategie non Nash) che si incontrano prendono di meno che non quando si incontrano un mutante e non mutante (una strategia Nash e una non Nash)

Una vecchia conoscenza...

È un gioco evolutivo con un equilibrio evolutivo!

		non confessa	
		confessa	non confessa
non confessa	confessa	$(-1, -1)$	$(-10, 0)$
	non confessa	$(0, -10)$	$(-5, -5)$



Un altro esempio

Due animali di una stessa specie si contendono la conquista di una preda.

- Assumiamo che l'utilità di conquistare la preda sia 1.
- Consideriamo due strategie:
 - Aggressiva (falco)
 - Non aggressiva (colomba)

Un altro esempio

Due animali di una stessa specie si contendono la conquista di una preda.

- Assumiamo che l'utilità di conquistare la preda sia 1.
- Consideriamo due strategie:
 - Aggressiva (falco)
 - Non aggressiva (colomba)
- Se entrambi si comportano da colombe si divideranno la preda ottenendo $\frac{1}{2}$ ciascuno. Se uno si comporta da falco e uno da colomba, il primo prende 1 e il secondo 0. Se entrambi si comportano da falco prenderanno ciascuno $\frac{1}{2} - c$ dove c è il costo del combattimento
- Come andrà a finire?

Un altro esempio

Due animali di una stessa specie si contendono la conquista di una preda.

- Assumiamo che l'utilità di conquistare la preda sia 1.
- Consideriamo due strategie:
 - Aggressiva (falco)
 - Non aggressiva (colomba)
- Se entrambi si comportano da colombe si divideranno la preda ottenendo $\frac{1}{2}$ ciascuno. Se uno si comporta da falco e uno da colomba, il primo prende 1 e il secondo 0. Se entrambi si comportano da falco prenderanno ciascuno $\frac{1}{2} - c$ dove c è il costo del combattimento
- Come andrà a finire? Dipende tutto da c !

Un altro esempio

	Falco	Colomba
Falco	$(\frac{1}{2} - c, \frac{1}{2} - c)$	$(1, 0)$
Colomba	$(0, 1)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Cerchiamo gli equilibri di Nash in pure:

- Se $c > \frac{1}{2}$, il gioco ha due equilibri (F, C) e (C, F) che non sono evolutivi
- Se $c = \frac{1}{2}$, ci sono tre equilibri di Nash, l'unico evolutivo è (F, F) . F è l'unica strategia evolutivamente stabile
- Se $c < \frac{1}{2}$, allora (F, F) è un equilibrio di Nash evolutivo ma inefficiente.



Strategie miste

Una strategia mista è un numero $p \in [0,1]$. Diciamo che con probabilità p il primo giocatore userà la strategia F e con probabilità $(1 - p)$ la strategia C. La stessa cosa per il secondo giocatore, a cui diamo la strategia mista q .

Calcoliamo le utilità:

$$f(p, q) = g(q, p) = h(p, q) = \left(\frac{1}{2} - c\right)pq + p(1 - q) + \frac{1}{2}(1 - p)(1 - q) = \frac{p - q + 1}{2 - cpq}$$

Strategie miste

- Se $c < \frac{1}{2}$, allora l'unico equilibrio di Nash è in pure $(p = 1, q = 1)$ e corrisponde a giocare sempre la strategia F.
- Se $c = \frac{1}{2}$, tutti i punti del tipo $(1, q)$ e $(p, 1)$ sono equilibri di Nash, ma solo $(p = 1, q = 1)$ è evolutivo
- Se $c > \frac{1}{2}$, allora ci sono tre equilibri di Nash, $(p = 0, q = 1)$, $(p = 1, q = 0)$ e $(p = \frac{1}{2c}, q = \frac{1}{2c})$. Solo il terzo è evolutivo.



Applicazioni

