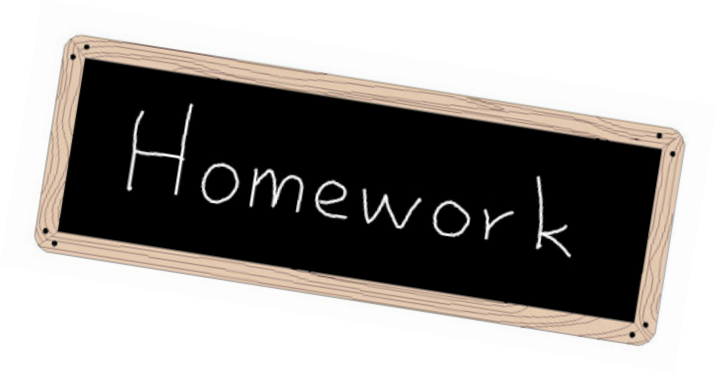
Esercizi

Monica Salvioli

15 Aprile 2021

Gioco di maggioranza



Ci sono tre giocatori che devono prendere una decisione a maggioranza.

$N = \{1,2,3\}$

$v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$

$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = v(\{1,2,3\}) = 1$

Determinare il nucleo e il valore Shapley.

NUCLEO NEL GIOCO DI MAGGIORANZA

$N = \{1, 2, 3\}$

$$v(\phi) = v(1) = v(2) = v(3) = 0$$

$$v(1,2) = v(1,3) = v(2,3) = \underline{\underline{v(1,2,3) = 1}}$$

$$\begin{cases} \underline{x_1} + \underline{x_2} \geq v(1,2) = 1 \\ \underline{x_1} + \underline{x_3} \geq v(1,3) = 1 \\ \underline{x_2} + \underline{x_3} \geq v(2,3) = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 3$$

$2 \geq 3$ impossibile

$\longrightarrow$ NUCLEO VUOTO

VALORE SHAPLEY NEL GIOCO DI MAGGIORANZA

$N = \{1, 2, 3\}$

$v(\phi) = v(1) = v(2) = v(3) = 0$

$v(1,2) = v(1,3) = v(2,3) = v(1,2,3) = 1$

Giocatore 1

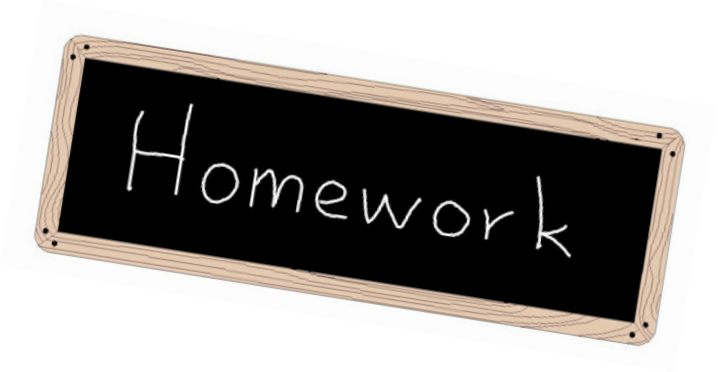
$\sigma_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\sigma_2 = \frac{1}{3}$

$\sigma_3 = \frac{1}{3}$

PERMUTAZIONI	CONTRIBUTI MARGINALI	VALORE
1, 2, 3	$v(1) - v(\phi)$	0
1, 3, 2	$v(1) - v(\phi)$	0
2, 1, 3	$v(1,2) - v(2)$	1
3, 1, 2	$v(1,3) - v(3)$	1
2, 3, 1	$v(1,2,3) - v(2,3)$	0
3, 2, 1	$v(1,2,3) - v(2,3)$	0

Il gioco dei guanti



Ci sono tre giocatori, uno ha un guanto sinistro e due un guanto destro. Naturalmente, un guanto spaiato non è utile, quindi assumiamo che lo scopo del gioco sia formare paia di guanti. Che funzione caratteristica scegliamo?

Per esempio, quella che assegna a ogni coalizione il numero di paia di guanti che riesce a formare. Si ha quindi:

D D S

$$N = \{1,2,3\}$$

$$v(\emptyset) = v(\{i\}) = v(\{1,2\}) = 0$$

$$v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = v(N) = 1$$

Determinare il valore Shapley.

$N = \{S, \underline{D_1} \ \underline{D_2}\}$

$v(\phi) = v(i) = v(D_1, D_2) = 0$

$v(S, D_1) = v(S, D_2) = v(S, D_1, D_2) = 1$

PERMUTAZIONI	S	D_1	D_2
$S D_1 D_2$	0	1	0
$S D_2 D_1$	0	0	1
$D_1 S D_2$	1	0	0
$D_1 D_2 S$	1	0	0
$D_2 S D_1$	1	0	0
$D_2 D_1 S$	1	0	0

$\sigma(S) = \frac{4}{6}$

$\sigma(D_1) = \frac{1}{6}$

$\sigma(D_2) = \frac{1}{6}$

Shapley value nel gioco dei guanti

I partiti

Ci sono 4 partiti:

- A ottiene il 40% dei voti;
- B ottiene il 23%;
- C ottiene il 19%;
- D ottiene il 18%

Per prendere un decisione è necessario avere il 51%. Trovare il valore Shapley.

GIOCO DEI PARTITI

A	B	C	D
40	23	19	18

maggioranza 51

$v\{1,2\}=1$ $v\{1,3\}=1$ $\{1,4\}$

$\{1,2,3\}$ $v\{1,2,4\}$ $\{1,3,4\}$

$\{2,3,4\}$ $\{1,2,3,4\}$

Coalizioni vincenti

2, 3, 4 sono giocatori simmetrici

$$\frac{s!\,(n-s-1)!}{n!}$$

$$\sigma_1 = \frac{2!}{4!}\left(v\{1,2\}+v\{1,3\}+v\{1,4\}\right) + \frac{2!}{4!}\left(v\{1,2,3\}+v\{1,2,4\}+v\{1,3,4\}\right)$$

$$= \frac{2!}{4!}(3)+\frac{2!}{4!}(3) = \frac{1}{2}$$

$1/2 : 3$

VALORE SHAPLEY

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

Il consiglio di sicurezza dell’Onu

Nel consiglio di sicurezza dell'Onu siedono 5 membri permanenti e 10 a rotazione. Perché una risoluzione sia approvata, il vecchio sistema prevedeva che dovesse avere il voto favorevole di tutti i membri permanenti e di almeno 4 membri a rotazione.

Matematicamente, $S \subset N$ è vincente se:

- $\{1, \dots, 5\} \subseteq S$
- $|S| \geq 9$

- Osserviamo che i membri permanenti sono tutti giocatori di veto.

Determinare il nucleo e il valore Shapley.

CONSIGLIO ONU

NUCLEO

5 permanenti, 10 a rotazione

Tutti i permanenti + almeno 4 di quelli a rotazione

P	P	P	P	P	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
$\frac{1}{5}$,	$\frac{1}{5}$,	$\frac{1}{5}$,	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
0	1	0	0	0	.	—			—					

CONSIGLIO ONU

SHAPLEY

5 permanenti, 10 a rotazione

5 + 3 rotazione + i

Tutti i permanenti + almeno 4 di quelli a rotazione

$$\sigma_i(v) = \sum_{S \in P(i)} \frac{(|S|-1)!\,(n-|S|)!}{n!}$$

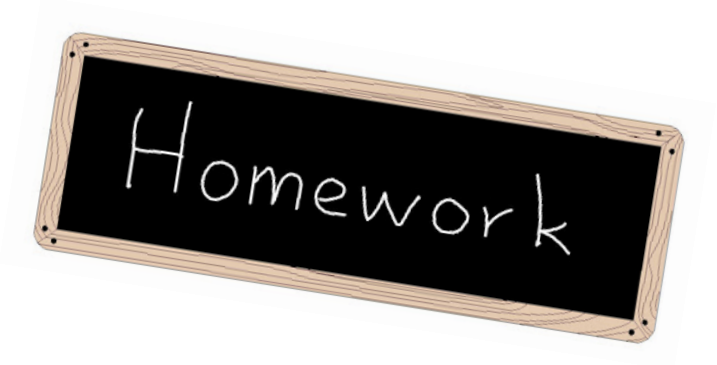
$$P(i) = \{ S \subseteq N \;.\; i \in S,\ \underline{v(S) = 1},\ \underline{v(S \setminus \{i\}) = 0} \}$$

i non giocatore di veto

5 permanenti i

$$\binom{9}{3} \cdot \frac{(9-1)!\,(15-9)!}{15!} = \frac{0{,}2\%}{19\%}$$

Esercizio



Quattro ragazzi (Alberto, Bernardo, Carlo e Davide) devono dividersi in due camere con due letti ciascuna. Date le loro preferenze:

Alberto: $B \succ C \succ D$;
Bernardo: $C \succ A \succ D$;
Carlo: $A \succ B \succ D$;
Davide: $A \succ B \succ C$.

dire se esiste un matching stabile. (No)

Le preferenze di quale giocatore sono irrilevanti? (Davide)

Esercizio

Consideriamo il seguente problema di matching, con

$\mathcal{W}$ = {Catwoman, Wonderwoman}
$\mathcal{M}$ = {Superman, Batman, Flash}

Supponiamo che Catwoman preferisca Batman a Superman e Superman a Flash, mentre Wonderwoman preferisca Superman a Flash e Flash a Batman.

1. Se le donne visitano gli uomini, quale è un insieme stabile?
2. Determinare le preferenze degli uomini (considerando anche l'opzione: "preferisco stare da solo") in modo che ci sia un altro insieme stabile.

(BATMAN, CATWOMAN) (SUPERMAN, WONDERW) FLASH

Batman $W > \phi > C$

Superman $C > W > \phi$

Flash $C > W > \phi$

(Superman, Catwoman) (Flash, Wonderwoman) Batman