# MATEMATICA PER LO STUDIO DELLE INTERAZIONI STRATEGICHE: TEORIA DEI GIOCHI

**Anna TORRE** [1]

## 1 EQUILIBRI CORRELATI

Il concetto di equilibrio correlato è stato sviluppato da Aumann in un articolo del 1974 (Journal of Mathematica Economics).

Mettiamoci dal punto di vista di due giocatori che possono parlare, accordarsi, e correlare le strategie scelte, ma sempre da un punto di vista non cooperativo, cioè alla fine vogliono che la soluzione sia stabile.

Per esempio nella battaglia dei sessi i due equilibri di Nash possono essere ottenuti correlando le strategie, e quindi accettando di lasciare a una moneta la scelta tra i due equilibri di Nash in strategie pure, fermo restando che una volta effettuata questa scelta, essa risulta essere stabile.

Ma si può ottenere molto di più, cioè si può in qualche modo arrivare a soluzioni che non sono equilibri di Nash.

Consideriamo il seguente gioco in forma strategica:

| | L | R |
|---|---|---|
| T | 6,6 | 2,7 |
| B | 7,2 | 0,0 |

Questo gioco ha due equilibri in strategie pure $(B, L)$ e $(T, R)$ e uno in strategie miste $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$con payoff atteso per entrambi i giocatori di $\frac{14}{3}$.

Se i due giocatori potessero accordarsi nel giocare $(T, L)$, $(B, L)$ e $(T, R)$ con probabilità $\frac{1}{3}$ ciascuno, il payoff atteso sarebbe $\frac{15}{3}$ (è ovvio, si eliminerebbe lo spreco di buttare una quota di probabilità su $(B, R)$ che dà payoff 0.

Ma se i giocatori devono poi giocare indipendentemente, poichè $(T, L)$ non è un equilibrio di Nash, l'accordo risulta non essere stabile. Questo accordo si può ottenere in maniera stabile se si ha a disposizione un mediatore affidabile.

Il compito del mediatore è quello di rendere in qualche modo stabile la scelta di giocare con probabilità $\frac{1}{3}$ ciascuno dei tre $(T, L)$, $(B, L)$ e $(T, R)$. Si procede così: il mediatore compie un esperimento casuale con tre risultati ciascuno di probabilità $\frac{1}{3}$ (per esempio lancia un dado e se esce 1 o 2 opta per $(T, L)$, se esce 3 o 4 opta per $(T, R)$, se esce 5 o 6 opta per $(B, L)$) Ma (e questa è l'idea che fa funzionare la

[1] Dipartimento di Matematica, Università di Pavia, Via Ferrata 1, 27100, Pavia, Italy. *E-mail: atorre@dimat.unipv.it*

faccenda) **non rende pubblica ai due giocatori l'uscita del dado, bensì comunica a ciascuno separatamente quello che lui deve giocare**. Per esempio se è uscito 1 lui dice al giocatore $I$ di giocare $T$ e al giocatore 2 di giocare $L$. In tal modo il giocatore $I$ non sa se alla fine giocando $T$ si troverà in $(T, L)$ o in $(T, R)$ e analogamente il giocatore $II$ non sa se se alla fine giocando $L$ si troverà in $(T, L)$ o in $(B, L)$.

Supponiamo allora che il mediatore dica $T$ al primo giocatore e $L$ al secondo giocatore senza rendere pubblica questa informazione, cioè comunicando a ciascuno solo quanto di sua pertinenza. Il giocatore $I$ in questo modo non ha interesse a deviare, perchè se non devia prende 6 e se devia ha un valore atteso di $\frac{7+0}{2}$ che è minore. Infatti dopo la comunicazione che deve giocare $T$ il giocatore $I$ attribuisce probabilità $\frac{1}{2}$ al fatto che il mediatore voglia far giocare $(T, L)$ e probabilità $\frac{1}{2}$ al fatto che il mediatore voglia far giocare $(T, R)$.

**Definizione 1.1** *Sia $G = (X, Y, f, g)$ un gioco in forma strategica finito a due giocatori, e supponiamo per semplicità di scrittura che ciascuno dei due abbia a disposizione due strategie (nel caso di $n$ strategie la generalizzazione è ovvia), dove $X = \{x_1, x_2\}$ e $Y = \{y_1, y_2\}$ e $f,\ g\ : X \times Y \to \mathbb{R}$. Un equilibrio correlato è una distribuzione di probabilità su $X \times Y$ tale che, detta $p_{i,j}$ la probabilità assegnata a $(x_i, y_j)$, si ha :*

$$p_{1,1}f(x_1, y_1) + p_{1,2}f(x_1, y_2) \geq p_{1,1}f(x_2, y_1) + p_{1,2}f(x_2, y_2)$$

$$p_{2,1}f(x_2, y_1) + p_{2,2}f(x_2, y_2) \geq p_{2,1}f(x_1, y_1) + p_{1,2}f(x_1, y_2)$$

$$p_{1,1}g(x_1, y_1) + p_{2,1}g(x_2, y_1) \geq p_{1,1}g(x_1, y_2) + p_{2,1}g(x_2, y_2)$$

$$p_{1,2}g(x_1, y_2) + p_{2,2}g(x_2, y_2) \geq p_{1,1}g(x_1, y_1) + p_{2,1}g(x_2, y_1)$$

Vediamo di scrivere le prime due relazioni in modo da interpretarle meglio:

$$\frac{p_{1,1}}{p_{1,1} + p_{1,2}}f(x_1, y_1) + \frac{p_{1,2}}{p_{1,1} + p_{1,2}}f(x_1, y_2) \geq \frac{p_{1,1}}{p_{1,1} + p_{1,2}}f(x_2, y_1) + \frac{p_{1,2}}{p_{1,1} + p_{1,2}}f(x_2, y_2)$$

$$\frac{p_{2,1}}{p_{2,1} + p_{2,2}}f(x_2, y_1) + \frac{p_{2,2}}{p_{2,1} + p_{2,2}}f(x_2, y_2) \geq \frac{p_{2,1}}{p_{2,1} + p_{2,2}}f(x_1, y_1) + \frac{p_{2,2}}{p_{2,1} + p_{2,2}}f(x_1, y_2)$$

Il primo membro della prima disequazione rappresenta il payoff atteso del primo giocatore dopo che il mediatore gli ha comunicato di giocare la prima strategia nell'ipotesi che lui rispetti l'indicazione, mentre il secondo membro rappresenta il payoff atteso dopo che il mediatore gli ha comunicato di giocare la prima strategia se lui non rispetta l'indicazione. Naturalmente occorre osservare che la probabilità viene aggiornata bayesianamente rispetto all'indicazione del mediatore.

Il principio è lo stesso che abbiamo usato per la definizione di equilibrio di Nash, cioè richiediamo stabilità rispetto a deviazioni unilaterali.

**Osservazione 1.1** Nel dilemma del prigioniero

| | L | R |
|---|---|---|
| T | 3,3 | 1,4 |
| B | 4,1 | 2,2 |

la coppia di strategie $(T, L)$ non è un equilibrio correlato. Questo significa che la distribuzione di probabilità che assegna 1 a $(T, L)$ e 0 a tutte le altre uscite del gioco non è un equilibrio correlato.