

Teoria dei Giochi

Anna Torre

Almo Collegio Borromeo 16 marzo 2021 email: anna.torre@unipv.it

LA BATTAGLIA DEI SESSI

I \ II	L	R
T	(2, 1)	(0, 0)
B	(0, 0)	(1, 2)

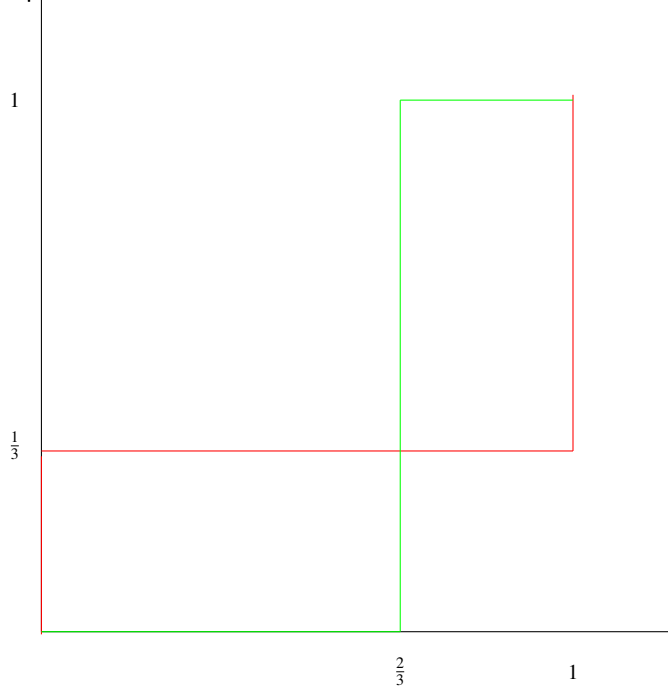
Ha due equilibri in strategie pure : (T, L) , (B, R) e uno in strategie miste: $p = \frac{2}{3}$, $q = \frac{1}{3}$ con valore atteso per entrambi i giocatori $\frac{2}{3} < 1$

$$f(p, q) = (3q - 1)p + 1 - q$$

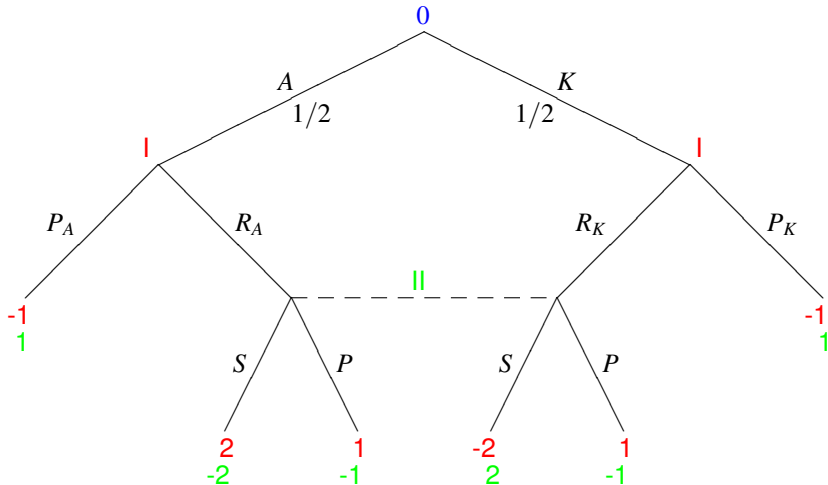
- ▶ massimo per $p = 1$ quando $q \geq \frac{1}{3}$
- ▶ massimo per $p = 0$ se $q \leq \frac{1}{3}$ e per ogni valore di p se $q = \frac{1}{3}$

$$g(p, q) = (3p - 2)q + 2 - 2p$$

- ▶ massimo per $q = 1$ quando $p \geq \frac{2}{3}$
- ▶ massimo per $q = 0$ se $p \leq \frac{2}{3}$ e per ogni valore di q se $p = \frac{2}{3}$



IL POKER SEMPLIFICATO IN FORMA ESTESA



Poker semplificato

Rivediamo dal punto di vista dell'equilibrio di Nash il poker semplificato:

I II	P	S
$R_A R_K$	$(1, -1)$	$(0, 0)$
$R_A P_K$	$(0, 0)$	$(1/2, -1/2)$
$P_A P_K$	$(-1, 1)$	$(-1, 1)$
$P_A R_K$	$(0, 0)$	$(-3/2, 3/2)$

NB: la strategia $R_A R_K$ prevede (per via di R_K) che il giocatore I bluffi.

Poker semplificato dopo aver tolto le strategie dominate

I II		P	S
		q	$1 - q$
p	$R_A P_K$	$(0, 0)$	$(1/2, -1/2)$
$1 - p$	$R_A R_K$	$(1, -1)$	$(0, 0)$

- ▶ $f(p, q) = -\frac{3}{2}pq + \frac{1}{2}p + q = (-\frac{3}{2}q + \frac{1}{2})p + q$
- ▶ massimo per $p = 1$ quando $q \leq \frac{1}{3}$
- ▶ massimo per $p = 0$ se $q \geq \frac{1}{3}$ e per ogni valore di p se $q = \frac{1}{3}$
- ▶ $g(p, q) = (\frac{3}{2}p - 1)q - \frac{1}{2}p$
- ▶ massimo per $q = 1$ quando $p \geq \frac{2}{3}$
- ▶ massimo per $q = 0$ se $p \leq \frac{2}{3}$ e per ogni valore di q se $p = \frac{2}{3}$
- ▶ Quindi l'equilibrio di Nash si ottiene per $p = \frac{2}{3}$ e $q = \frac{1}{3}$

- ▶ L'equilibrio di Nash prevede per il primo giocatore di giocare la prima strategia con probabilità $\frac{2}{3}$ e di conseguenza la seconda con probabilità $\frac{1}{3}$.
- ▶ La strategia $R_A R_K$ prevede (per via di R_K) che il giocatore I bluffi.
- ▶ Quindi la strategia ottimale per I prevede con probabilità positiva ($1/3$) che I adotti la strategia $R_A R_K$ e quindi che, bluffi mediamente $1/3$ delle volte
- ▶ È ottimale per I bluffare con questa “frequenza”, nè più spesso nè meno spesso!

Strategie correlate

Consideriamo un gioco in forma strategica: (X, Y, u_I, u_{II}) ,

- ▶ X è l'insieme (finito) delle strategie del primo giocatore
- ▶ Y è l'insieme (finito) delle strategie del secondo
- ▶ u_I è la funzione di utilità di I
- ▶ u_{II} è la funzione di utilità di II .

Come si riflette sul modello un accordo tra i due giocatori?

I giocatori possono decidere di giocare una coppia di strategie

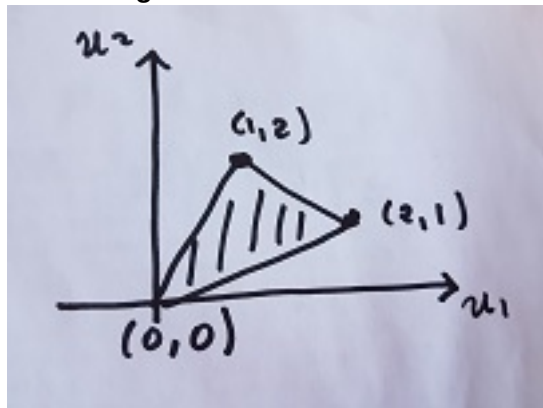
$(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$,

ma possono anche accordarsi su una strategia correlata μ su $X \times Y$.

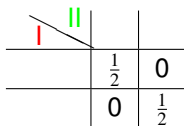
Strategie correlate

- ▶ $\Delta(X)$ insieme di tutte le distribuzioni di probabilità su X
- ▶ $\Delta(Y)$ insieme di tutte le distribuzioni di probabilità su Y .
- ▶ e $\Delta(X \times Y)$ insieme di tutte le distribuzioni di probabilità su $X \times Y$

Una **strategia correlata** è una distribuzione di probabilità su $X \times Y$.



Strategie correlate



	$\frac{1}{2}$	0
	0	$\frac{1}{2}$

è una distribuzione di probabilità su $X \times Y$ che non si può ottenere come prodotto di due distribuzioni di probabilità indipendenti su X e Y .

1. $p(1 - q) = 0$, $q(1 - p) = 0$ implica o $p = q = 0$ oppure $p = q = 1$
2. $pq = \frac{1}{2}$ è in contrasto con 1

Strategie correlate

- ▶ Se ogni giocatore sceglie una distribuzione di probabilità sul suo spazio di strategie e si considera la distribuzione di probabilità su $X \times Y$ che si ottiene dall'assunto che le due distribuzioni su X e Y siano indipendenti, si gioca in maniera non cooperativa.
- ▶ Se i giocatori possono accordarsi su una distribuzione di probabilità qualunque su $X \times Y$ significa dire che **sono ammessi accordi vincolanti**.

Strategie correlate

 		
	$p_{1,1}$	$p_{1,2}$
	$p_{2,1}$	$p_{2,2}$

con $0 \leq p_i \leq 1$ per ogni i $1 \leq i \leq 4$ e $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$
 è una strategia correlata.

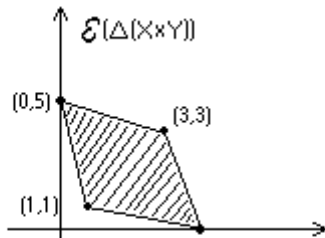
 	q	$1 - q$
p	pq	$p(1 - q)$
$1 - p$	$q(1 - p)$	$(1 - p)(1 - q)$

è una strategia mista. Le strategie miste sono strategie correlate ma non viceversa.

Dilemma del prigioniero

I \ II S T	S	T
S	(3, 3)	(0, 5)
T	(5, 0)	(1, 1)

L'insieme $\mathcal{E}(X \times Y)$ è tratteggiato in figura.



Equilibri correlati

Il concetto di equilibrio correlato è stato sviluppato da Aumann in un articolo del 1974 (Journal of Mathematical Economics).

- ▶ I due giocatori possono parlare, accordarsi, e correlare le strategie scelte, ma sempre da un punto di vista non cooperativo, cioè alla fine vogliono che la soluzione sia stabile.
- ▶ Nella battaglia dei sessi i due equilibri di Nash possono essere ottenuti correlando le strategie, e quindi accettando di lasciare a una moneta la scelta tra i due equilibri di Nash in strategie pure, fermo restando che una volta effettuata questa scelta, essa risulta essere stabile perché cade su un equilibrio di Nash.

Equilibri correlati

Ma si può ottenere molto di più, cioè si può in qualche modo arrivare a soluzioni che non sono equilibri di Nash. Consideriamo il seguente gioco in forma strategica:

I II	L	R
T	(6, 6)	(2, 7)
B	(7, 2)	(0, 0)

Questo gioco ha due equilibri in strategie pure (B, L) e (T,R) e uno in strategie miste $(2/3, 2/3)$

con payoff atteso per entrambi i giocatori di $14/3$.

Se i due giocatori potessero accordarsi nel giocare (T, L), (B, L) e (T,R) con probabilità $1/3$ ciascuno, il payoff atteso sarebbe $15/3$ (è ovvio, si eliminerebbe lo spreco di buttare una quota di probabilità su (B,R) che dà payoff 0. Ma se i giocatori devono poi giocare indipendentemente, poichè (T,L) non è un equilibrio di Nash, l'accordo risulta non essere stabile.

Questo accordo si può ottenere in maniera stabile se si ha a disposizione un mediatore affidabile. Il compito del mediatore è quello di rendere in qualche modo stabile la scelta di giocare con probabilità $1/3$

ciascuno dei tre (T,L), (B, L) e (T,R). Si procede così : il mediatore compie un esperimento casuale con tre risultati ciascuno di probabilità $1/3$ (per esempio lancia un dado e se esce 1 o 2 opta per (T, L), se esce 3 o 4 opta per (T,R), se esce 5 o 6 opta per (B, L)) Ma (e questa è l'idea che fa funzionare la faccenda) non rende pubblica ai due giocatori l'uscita del dado, comunica a ciascuno separatamente quello che lui deve giocare. Per esempio se è uscito 1 lui dice al giocatore I di giocare T e al giocatore 2 di giocare L. In tal modo il giocatore I non sa se alla fine giocando T si troverà in (T,L) o in (T,R) e analogamente il giocatore II non sa se se alla fine giocando L si troverà in (T, L) o in (B, L).

I \ II	L	R
T	(6, 6)	(2, 7)
B	(7, 2)	(0, 0)

Supponiamo allora che il mediatore dica T al primo giocatore e L al secondo giocatore senza rendere pubblica questa informazione, cioè comunicando a ciascuno solo quanto di sua pertinenza. Il giocatore I in questo modo non ha interesse a deviare, perchè se non devia prende $\frac{6+2}{2}$ e se devia ha un valore atteso di $\frac{7+0}{2}$ che 'minore. Infatti, dopo la comunicazione che deve giocare T, il giocatore I attribuisce probabilità 1/2 al fatto che il mediatore voglia far giocare (T, L) e probabilità 1/2 al fatto che il mediatore voglia far giocare (T,R).

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

Nash, John (1950). "The Bargaining Problem". *Econometrica*. 18 (2): 155–162. doi:10.2307/1907266. JSTOR 1907266.

QUESTA PARTE NON VERRÁ CHIESTA ALL'ESAME.

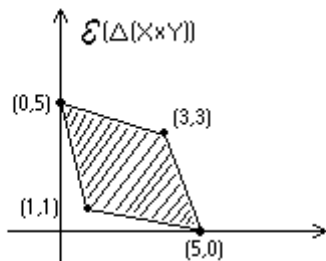
Diremo che un problema di contrattazione è una coppia (F, d) , dove:

- ▶ $F \subseteq R^2$, chiuso e convesso
- ▶ $d \in R^2$

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

F rappresenta l'insieme di tutte le coppie di valori di utilità ai quali i due giocatori possono pervenire, $d = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ rappresenta il “punto di disaccordo”, cioè il valore che i giocatori possono ottenere in caso di mancato raggiungimento di un accordo. Un problema di contrattazione è una coppia (F, d) . In particolare, nell'esempio delle strategie correlate $F = \mathcal{E}(\Delta(X \times Y))$ e $d = (v_I, v_{II})$.

Dilemma del prigioniero:



Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

Formalizziamo il problema di contrattazione.

Indichiamo con $\mathcal{B}$ l'insieme dei problemi di contrattazione dei quali ci occupiamo. Gli elementi di $\mathcal{B}$ sono coppie (F, d) , dove:

1. F è un sottoinsieme di R^2 , chiuso e convesso
2. $d = (\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in R^2$
3. $F \cap \{(u_1, u_2) \in R^2 : u_1 \geq \bar{u}_1 \text{ e } u_2 \geq \bar{u}_2\}$ è non vuoto e limitato

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

Se in F c'è un elemento (u_1, u_2) con $u_1 > \bar{u}_1$ e $u_2 > \bar{u}_2$, allora il problema di contrattazione (F, d) viene detto *essenziale*.

Per *soluzione* del problema di contrattazione (relativamente alla classe $\mathcal{B}$ sopra individuata) intendiamo una applicazione Φ definita su $\mathcal{B}$ a valori in R^2 .

L'idea è che ad ogni (F, d) siamo in grado di associare (univocamente!) una coppia $\Phi(F, d) = (\Phi_1(F, d), \Phi_2(F, d))$ che rappresenti, in termini interpretativi, i valori di utilità assegnati rispettivamente ai due giocatori.

Come definire questa Φ ?

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

L'approccio seguito da Nash non è stato quello di definire “a priori” Φ , ma di imporre condizioni “ragionevoli” che ogni soluzione Φ dovrebbe soddisfare.

E poi di provare che c'è una ed una sola Φ che soddisfa tali condizioni.

Ottimo di Pareto forte e debole)

Sia F un sottoinsieme chiuso di $\mathbf{R}^2$

- ▶ Si dice che $\bar{x}, \bar{y}$ è un ottimo paretiano forte per F se non esiste nessun $(x, y) \in F$ con $x \geq \bar{x}$ e $y \geq \bar{y}$ con almeno una delle due disuguaglianze che sia stretta;
- ▶ Si dice che $\bar{x}, \bar{y}$ è un ottimo paretiano debole per F se non esiste nessun $(x, y) \in F$ con $x > \bar{x}$ e $y > \bar{y}$.

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

Queste condizioni sono le seguenti:

- ▶ **Efficienza forte:** $\Phi(F, d) \in F$ ed è un ottimo paretiano forte per F
- ▶ **Razionalità individuale:** $\Phi_1(F, d) \geq \bar{u}_1$ e $\Phi_2(F, d) \geq \bar{u}_2$
- ▶ **Co-varianza rispetto a cambiamenti di scala:** Per ogni $\lambda_1, \lambda_2, \gamma_1, \gamma_2 \in R$ t.c. $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, siano:

$$F' = \{(\lambda_1 u_1 + \gamma_1, \lambda_2 u_2 + \gamma_2) : (u_1, u_2) \in F\} \text{ e } d' = (\lambda_1 \bar{u}_1 + \gamma_1, \lambda_2 \bar{u}_2 + \gamma_2)$$

Allora

$$\Phi(F', d') = (\lambda_1 \Phi_1(F, d) + \gamma_1, \lambda_2 \Phi_2(F, d) + \gamma_2)$$

- ▶ **Indipendenza dalle alternative irrilevanti:** Sia dato (F, d) e sia $G \subseteq F$, G chiuso e convesso, t.c. $\Phi(F, d) \in G$. Allora
$$\Phi(F, d) = \Phi(G, d)$$
- ▶ **Simmetria:** Se $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$ e se $(u_1, u_2) \in F \Leftrightarrow (u_2, u_1) \in F$, allora
$$\Phi_1(F, d) = \Phi_2(F, d)$$

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

Si può allora enunciare il seguente: Teorema (Nash 1951)

C'è una ed una sola soluzione Φ , definita su $\mathcal{B}$, che soddisfa le condizioni 1), ..., 5). Inoltre, se (F, d) è essenziale, si ha che:

$$\Phi(F, d) = \operatorname{argmax} (u_1 - \bar{u}_1)(u_2 - \bar{u}_2) \text{ con } (u_1, u_2) \in F, u_1 \geq \bar{u}_1, u_2 \geq \bar{u}_2$$

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

Analisi degli assiomi Il teorema di Nash è in grado di mettere d'accordo chiunque si trovi in una situazione come quella di sopra ed accetti le sue condizioni per un'equa spartizione.

Il primo assioma vuol mettere in luce un criterio di efficienza: non ha senso accontentarsi di un risultato, se entrambi i giocatori possono fare meglio. Dunque, anche ammettendo che i giocatori possano distruggere utilità, questo non può accadere all'equilibrio.

Il terzo assioma è detto di invarianza rispetto a trasformazioni di utilità. Dice che se cambiamo unità di misura all'utilità del giocatore (i fattori h e k) e aggiungiamo certe quantità iniziali, il risultato cambia tenendo conto esattamente dei fattori precedenti.

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

Il quarto è chiamato indipendenza dalle alternative irrilevanti: se aggiungere a C , che è l'insieme delle utilità che i giocatori si possono garantire nella contrattazione, altri elementi, che portano a costruire un insieme più grande C' , porta come risultato a una situazione che già era in C , allora quest'ultima è già la soluzione per il gioco C . (Notare che il punto di disaccordo è lo stesso in entrambi i giochi). In altre parole, quello che abbiamo aggiunto a C non sono che alternative irrilevanti, appunto.

Il quinto, detto assioma di simmetria, è molto chiaro: significa che in un gioco simmetrico il risultato deve essere simmetrico. Se i giocatori sono indistinguibili dal punto di vista delle loro utilità e dal punto di partenza, il risultato deve essere lo stesso per ambedue.

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

Il modello di contrattazione di Nash è certamente molto interessante. Non è certo esente da critiche, però. Vediamo ora alcuni problemi che sono emersi rappresentando una critica all'approccio assiomatico di Nash:

- ▶ Come si sceglie il punto d ? Non è facile fare una scelta se il gioco dato non è cooperativo. In realtà ci sono vari approcci: il max-min, un equilibrio di Nash,...
- ▶ analogamente, il “feasibility set” F è individuato con certezza? ogni F con le caratteristiche date (convesso, etc.) è un “feasibility set” per un qualche problema di contrattazione? O ve ne sono alcuni che non si possono ottenere in questo modo?

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

- ▶ altre informazioni, oltre a quelle previste (e cioè (F, d)), rappresentate in termini di valori di utilità, non hanno alcun rilievo in un problema di contrattazione? Non saremmo disposti a modificare le nostre opinioni se avessimo informazioni supplementari?
- ▶ per quale motivo Φ deve essere un “singleton”? Ad esempio, un gioco strategico non ha in genere un unico equilibrio di Nash
- ▶ un'altra obiezione è più generale ed è una obiezione di fondo all'approccio assiomatico. Perché mai determinare una soluzione su una classe di giochi quando si ha a che fare con un gioco concreto? Dietro a questa impostazione c'è l'idea di una validità normativa. Ma anche da questo punto di vista la classe dei giochi che posso aspettarmi di giocare è assimilabile all'insieme dei problemi di contrattazione su cui si ha l'assiomatizzazione di Nash?

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

- In alcuni casi la soluzione dettata dal modello non è equa. Per esempio, se la spartizione della somma avviene tra due persone (I e II) la cui funzione di utilità assume i seguenti valori:

Moneta di I	Moneta di II	Utilità di I	Utilità di II	Prodotto
0	100	0.00	1.00	0.00
25	75	0.25	0.98	0.245
50	50	0.50	0.90	0.450
75	25	0.75	0.73	0.548
100	0	1.00	0.00	0.00

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

la soluzione di Nash offre 75 a *I* e 25 a *II*. Ciò è eticamente ingiusto. In realtà la funzione di utilità dichiarata da *I* è la funzione dichiarabile da un “ricco”, mentre l'utilità dichiarata da *II* è più probabile per un “povero”.

Certamente sul piano etico siamo portati a pensare che sarebbe meglio dare di più al povero.

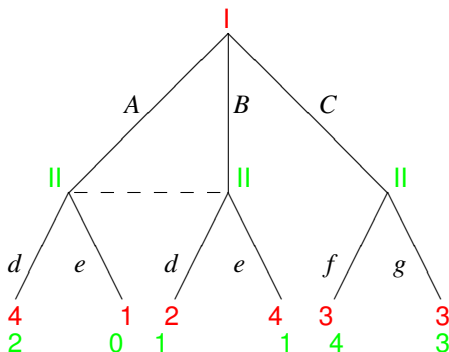
Ma l'ingiustizia non sembra essere nel modello di contrattazione, bensì nelle funzioni di utilità che vengono dichiarate dai due.

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

Le critiche più significative sono state fatte all'assioma dell'indipendenza dalle alternative irrilevanti. In effetti può non sembrare sensato che di fronte a nuove alternative la soluzione non debba mai cambiare. Nuove alternative possono cambiare la forza contrattuale di chi da queste viene privilegiato.

Esercizio 1

Dato il seguente gioco in forma estesa:



- ▶ trovarne la forma strategica;
- ▶ trovare poi tutti gli equilibri di Nash in strategie pure;
- ▶ trovare l'eventuale equilibrio che si ottiene per eliminazione iterata di strategie dominate

Soluzione

I II	<i>df</i>	<i>dg</i>	<i>ef</i>	<i>eg</i>
<i>A</i>	(4, 2)	(4, 2)	(1, 0)	(1, 0)
<i>B</i>	(2, 1)	(2, 1)	(4, 1)	(4, 1)
<i>C</i>	(3, 4)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 3)

Equilibri di Nash: (A, df) , (A, dg) , (B, ef) , (B, eg) , Il primo e l'unico che sopravvive alla eliminazione di strategie dominate.

Esercizio 2

Due giocatori devono spartirsi 10 euro. Tutte le suddivisioni sono accettabili compresa l'opzione di lasciare soldi sul tavolo.

Supponiamo che se x è la quantità di denaro che prende il giocatore I e y è la quantità di denaro che prende il giocatore II si abbia $u_I(x) = 2x$ e $u_{II}(y) = y - 5$. Sia poi $(0, 0)$ il “disagreement point”.

Quale è la soluzione di Nash del problema?

Soluzione:

$$x + y = 10, u_1 = x, u_2 = y - 5 = 10 - x - 5 = 5 - x$$

$$u_1 \cdot u_2 = x(x - 5)$$

$$\text{Argmax}(u_1 \cdot u_2) \text{ si ha per } x = \frac{5}{2}, y = \frac{15}{2} \text{ e } u_1 = u_2 = \frac{5}{2}$$

Esercizio 3

Dato il seguente gioco in forma strategica:

I \ II	L	R
T	(2, 1)	(-1, -2)
B	(2, -1)	(1, 0)

Trovare tutti gli equilibri di Nash in strategie pure e miste.

Dire se la seguente distribuzione di probabilità:

I \ II	L	R
T	$\frac{1}{5}$	0
B	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$

è una strategia correlata e se è una strategia mista.

Soluzione

C'è un equilibrio di Nash in strategie pure che è (B, R) . calcoliamo gli equilibri in strategie miste:

Si ha

$u_1(p, q) = 2pq - p(1 - q) + 2q(1 - p) + (1 - p)(1 - q) = -2pq - 2p + 1 - q$
il cui massimo si ha sempre per $p = 0$ quando $q < 1$ e per ogni p
quando $q = 1$. Si ha

$u_2(p, q) = pq - 2p(1 - q) - q(1 - p) = (4p - 1)q - 2p$ il cui massimo si
ha per $q = 0$ quando $p > \frac{1}{4}$ e per $q = 1$ quando $p \leq \frac{1}{4}$. L'intersezione
delle due curve di miglior risposta si ha per $p = q = 0$ e dunque si
riottiene l'equilibrio in strategie pure (B, R) e tutte le coppie $(p, 1)$
quando $p > \frac{1}{4}$ tra le quali c'è anche (T, L) .