Equilibri di Nash

Monica Salvioli

9 Marzo 2021

Nella puntata precedente…

- Giochi a **informazione completa**:

Tutti sanno le regole del gioco, tutti sanno che tutti sanno le regole del gioco, tutti sanno che tutti sono razionali, tutti sanno che tutti massimizzano la loro utilità…

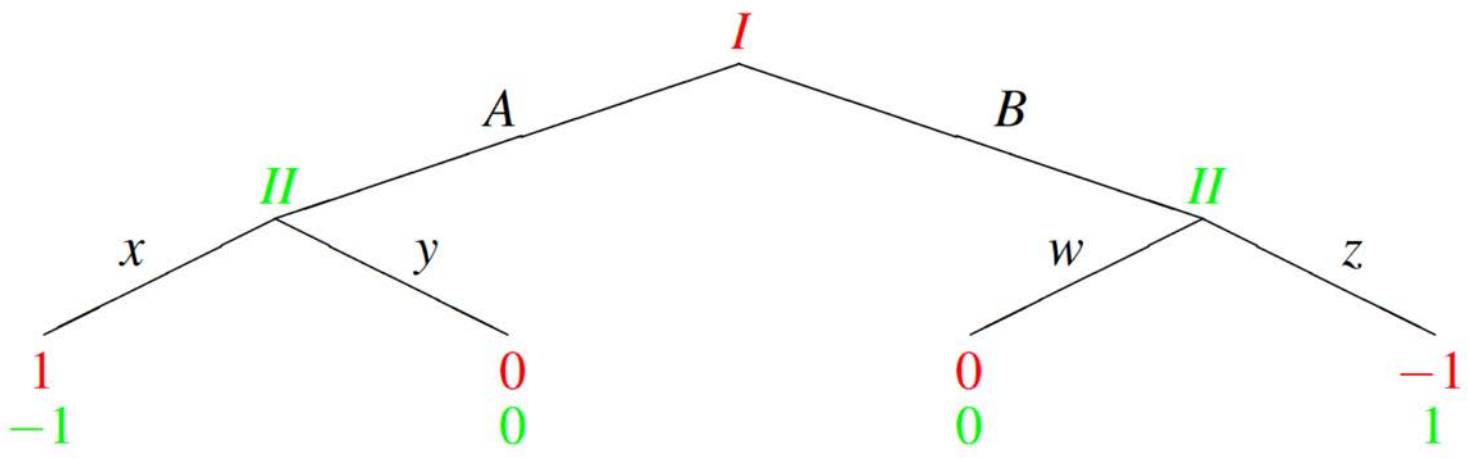
- Giochi a **informazione perfetta**:

Tutto è palese, anche la situazione del gioco ad ogni mossa

- Giochi a mosse contemporanee: *il secondo giocatore non sa cosa ha giocato il primo*

- Giochi in cui c'è una mossa della natura (o del caso…)

Giochi in forma estesa



Abbiamo parlato di induzione a ritroso…

Giochi in forma strategica

1	3
4	2

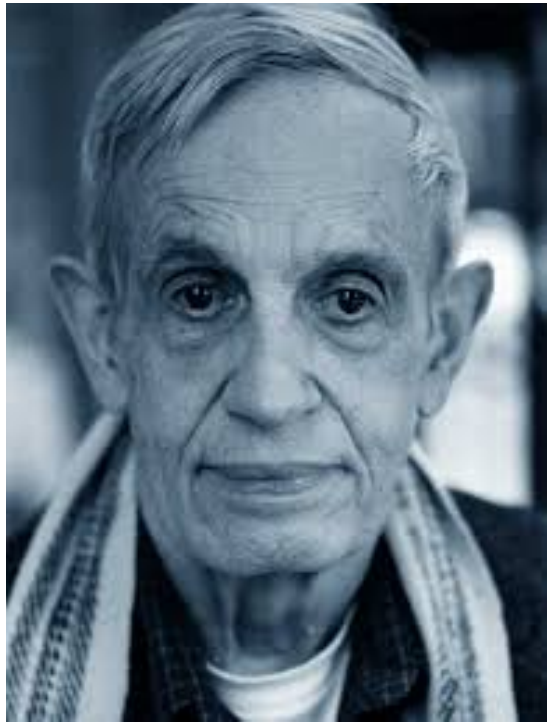
John von Neumann

Giochi in forma strategica

John von Neumann

1,6	3,-4
4,0	2,5

1949



John Nash

Giochi in forma strategica

Un gioco in forma strategica è determinato da:

- Insieme di giocatori: $N = \{1,2, \dots n\}$
- Uno spazio delle strategie per ogni giocatore: X e Y nel caso di due giocatori
- Una funzione di utilità per ogni giocatore: $f(x, y)$ e $g(x, y)$ nel caso di due giocatori

Il vettore (x, y) è detto **profilo di strategie** per i giocatori. La funzione di utilità di ogni giocatore associa ad ogni profilo di strategie un numero, che rappresenta la soddisfazione del giocatore relativa all'esito del gioco determinato dalle strategie giocate.

Giochi in forma strategica

Se il primo giocatore ha n strategie e il secondo giocatore ha m strategie, allora il gioco può essere descritto dalla seguente tabella:

$(\boldsymbol{a_{11}}, \boldsymbol{b_{11}})$	$(\boldsymbol{a_{12}}, \boldsymbol{b_{12}})$	$\dots$	$(\boldsymbol{a_{1m}}, \boldsymbol{b_{1m}})$
$(\boldsymbol{a_{21}}, \boldsymbol{b_{21}})$	$\dots$	$\dots$	$(\boldsymbol{a_{2m}}, \boldsymbol{b_{2m}})$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$(\boldsymbol{a_{n1}}, \boldsymbol{b_{n1}})$	$(\boldsymbol{a_{n2}}, \boldsymbol{b_{n2}})$	$\dots$	$(\boldsymbol{a_{nm}}, \boldsymbol{b_{nm}})$

Quando il primo giocatore sceglie la riga i e il secondo la colonna j, allora a_{ij} è l'utilità del primo, mentre b_{ij} è quella del secondo. Questa tabella è detta **bimatrice**.

Esiti razionali

Ora che abbiamo trovato un modo semplice per rappresentare i giochi, ci chiediamo come risolverli.

- Quali sono gli esiti razionali del di un gioco?
- Come si trovano?

Intuitivamente…

Due amici sono al telefono, quando cade la linea

- Entrambi possono provare a richiamare o aspettare che l'altro richiami
- Se entrambi richiamano contemporaneamente la linea risulterà occupata
- Se uno richiama e l'altro aspetta riusciranno a riprendere la conversazione

	chiamare	non chiamare
chiamare	(0, 0)	(1, 1)
non chiamare	(1, 1)	(0, 0)

Intuitivamente…

Due amici sono al telefono, quando cade la linea

- Entrambi possono provare a richiamare o aspettare che l'altro richiami
- Se entrambi richiamano contemporaneamente la linea risulterà occupata
- Se uno richiama e l'altro aspetta riusciranno a riprendere la conversazione

	chiamare	non chiamare
chiamare	(0, 0)	(1, 1)
non chiamare	(1, 1)	(0, 0)

Quali sono gli esiti razionali di questo gioco?

In vacanza

Due amici devono decidere se trascorrere le vacanze al mare o in montagna.

Il primo giocatore vorrebbe andare al mare e preferirebbe andarci in compagnia, mentre se si andasse in montagna preferirebbe andarci da solo.

Il secondo giocatore invece…

	(10, 10)	(1, -1)
	(1, -1)	(0, 0)

In vacanza

Notiamo che il primo giocatore preferisce il mare alla montagna, indipendentemente dal ritrovarsi solo o in compagnia!

	(10,)	(1,)
	(1,)	(0,)

In vacanza

Notiamo che il primo giocatore preferisce il mare alla montagna, indipendentemente dal ritrovarsi solo o in compagnia!

Questo vuol dire che ha una strategia migliore dell'altra, ***a prescindere dalla scelta del secondo giocatore***! Quindi andrà al mare.

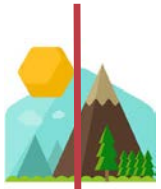
	(10,)	(1,)
	(1,)	(0,)

In vacanza

Notiamo che il primo giocatore preferisce il mare alla montagna, indipendentemente dal ritrovarsi solo o in compagnia!

Questo vuol dire che ha una strategia migliore dell'altra, ***a prescindere dalla scelta del secondo giocatore***! Quindi andrà al mare.

Per il secondo giocatore non c'è, in generale, una strategia migliore. Ma, sapendo che il primo giocatore andrà al mare, anche la sua decisione è presa: si andrà al mare.

		
	(10, 10)	(1, -1)
	(1, -1)	(0, 0)

Strategie dominate

La razionalità dei giocatori implica che nessuno sceglie una strategia se un'altra gli permette di ottenere di più, ***quali che siano le strategie degli altri giocatori***.

Si parla di ***eliminazione delle strategie dominate***: le strategie che portano risultati peggiori di altre, indipendentemente da quali siano le scelte degli altri giocatori, vengono eliminate, cioè non vengono giocate da giocatori razionali.

Siccome i giocatori sono razionali, questa informazione è ***nota a tutti***.

Strategie strettamente dominate

Supponiamo che la funzione di utilità di un giocatore sia $f(x, y)$, dove x rappresenta la sua strategia e y la strategia dell'altro giocatore.

Allora si dice che z è una strategia strettamente dominata se esiste una strategia u tale che

$$f(z, y) < f(u, y) \text{ per ogni possibile } y$$

La prima ipotesi che faremo è che un giocatore non usi mai una strategia dominata, cioè non giochi mai z se giocando u guadagna di più, <u>indipendentemente da quello che fa l'avversario</u>.

Strategie debolmente dominate

Una strategia z è debolmente dominata per il primo giocatore da una strategia u, se vale la relazione:

$$f(z, y) \leq f(u, y) \text{ per ogni possibile } y$$

Le strategie debolmente dominate non vengono di solito eliminate, perché a volte potrebbe essere conveniente giocarle.

QUIZ!

In questo gioco la compagnia 1 ha una strategia strettamente dominante

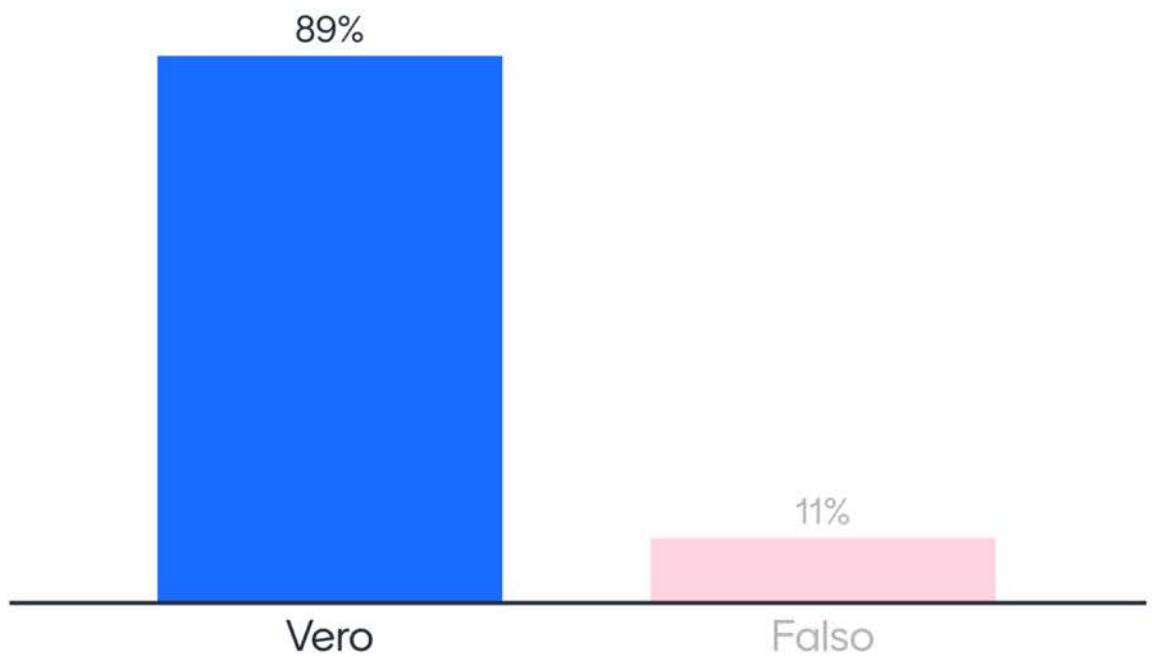
Mentimeter

	Prezzo basso	Prezzo alto
Prezzo basso	(48%,12%)	(60%,40%)
Prezzo alto	(40%,60%)	(32%,8%)

19

In questo gioco la compagnia 1 ha una strategia strettamente dominante

Mentimeter



19

Ma ci sono sempre? No

	chiamare	non chiamare
chiamare	(0, 0)	(1, 1)
non chiamare	(1, 1)	(0, 0)

Per esempio:

- Scegliere di richiamare non è sempre conveniente, perché anche l'altra persona potrebbe avere la stessa idea e la linea risulterebbe occupata.

- È una buona idea solo non è la stessa scelta dell'altro giocatore…

Cosa è un equilibrio?

L’equilibrio di un gioco è una indicazione di strategie che se comunicata ai giocatori fa sì che nessuno voglia giocare qualcosa di diverso, cambiando strategia e allontanandosi quindi dall’equilibrio stesso.

Le strategie di equilibrio ci indicano quali sono le scelte ottimali dei giocatori, quindi quali decisioni prenderanno giocando razionalmente.

Cosa è un equilibrio?

Ogni giocatore deve individuare la sua miglior risposta a tutte le possibili scelte dell’avversario.

Per esempio, se il mio amico richiama la mia migliore scelta è non richiamare, se lui non richiama la mia migliore scelta è richiamare.

Secondo Nash sono situazioni di equilibrio quelle in cui la mia strategia è la miglior risposta alla strategia dell’avversario e viceversa la strategia dell’avversario è la miglior risposta alla mia strategia.

Equilibrio di Nash: definizione

In un gioco tra due persone descritto dagli insiemi di strategie X e Y e dalle funzioni di utilità $f(x, y)$ e $g(x, y)$, una coppia di strategie (x^*, y^*) è un equilibrio di Nash se:

$$f(x^*, y^*) \geq f(x, y^*) \text{ per ogni } x \in X,$$

$$\mathrm{g}(x^*, y^*) \geq g(x^*, y) \text{ per ogni } y \in Y.$$

L'equilibrio di Nash è quella situazione del gioco in cui, se tutti giocano le strategie indicate, nessun giocatore ha un guadagno a cambiare e prendere decisioni diverse.

Equilibrio di Nash: definizione informale

Una volta che ci si trova in un esito del gioco corrispondente a un equilibrio di Nash, i giocatori non cambieranno strategia ma rimarranno ‘fermi’ per evitare di peggiorare il loro guadagno cambiando le loro scelte.

Per questo motivo sono chiamati *equilibri*.

Equilibrio di Nash: per ricordarselo…

https://www.youtube.com/watch?v=2d_dtTZQyUM

EQUILIBRIUM POINTS IN N-PERSON GAMES

BY JOHN F. NASH, JR.*

PRINCETON UNIVERSITY

Communicated by S. Lefschetz, November 16, 1949

One may define a concept of an n-person game in which each player has a finite set of pure strategies and in which a definite set of payments to the n players corresponds to each n-tuple of pure strategies, one strategy being taken for each player. For mixed strategies, which are probability distributions over the pure strategies, the pay-off functions are the expectations of the players, thus becoming polylinear forms in the probabilities with which the various players play their various pure strategies.

Any n-tuple of strategies, one for each player, may be regarded as a point in the product space obtained by multiplying the n strategy spaces of the players. One such n-tuple counters another if the strategy of each player in the countering n-tuple yields the highest obtainable expectation for its player against the $n - 1$ strategies of the other players in the countered n-tuple. A self-countering n-tuple is called an equilibrium point.

The correspondence of each n-tuple with its set of countering n-tuples gives a one-to-many mapping of the product space into itself. From the definition of countering we see that the set of countering points of a point is convex. By using the continuity of the pay-off functions we see that the graph of the mapping is closed. The closedness is equivalent to saying: if $P_1, P_2, \ldots$ and $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ are sequences of points in the product space where $Q_n \rightarrow Q$, $P_n \rightarrow P$ and Q_n counters P_n then Q counters P.

Since the graph is closed and since the image of each point under the mapping is convex, we infer from Kakutani's theorem[1] that the mapping has a fixed point (i.e., point contained in its image). Hence there is an equilibrium point.

In the two-person zero-sum case the "main theorem"[2] and the existence of an equilibrium point are equivalent. In this case any two equilibrium points lead to the same expectations for the players, but this need not occur in general.

* The author is indebted to Dr. David Gale for suggesting the use of Kakutani's theorem to simplify the proof and to the A. E. C. for financial support.

[1] Kakutani, S., *Duke Math. J.*, **8**, 457–459 (1941).

[2] Von Neumann, J., and Morgenstern, O., *The Theory of Games and Economic Behaviour*, Chap. 3, Princeton University Press, Princeton, 1947.

Equilibri di Nash: qualche considerazione

- Un massimo ombra è un equilibrio di Nash
- I risultati ottenuti per eliminazione di strategie fortemente dominate sono equilibri di Nash
- In un gioco in forma estesa a informazione perfetta gli equilibri ottenuti per induzione a ritroso sono equilibri di Nash del corrispondente gioco in forma strategica
- Ma ce ne sono altri...

QUIZ!

In questo gioco la compagnia 2 ha una strategia strettamente dominante

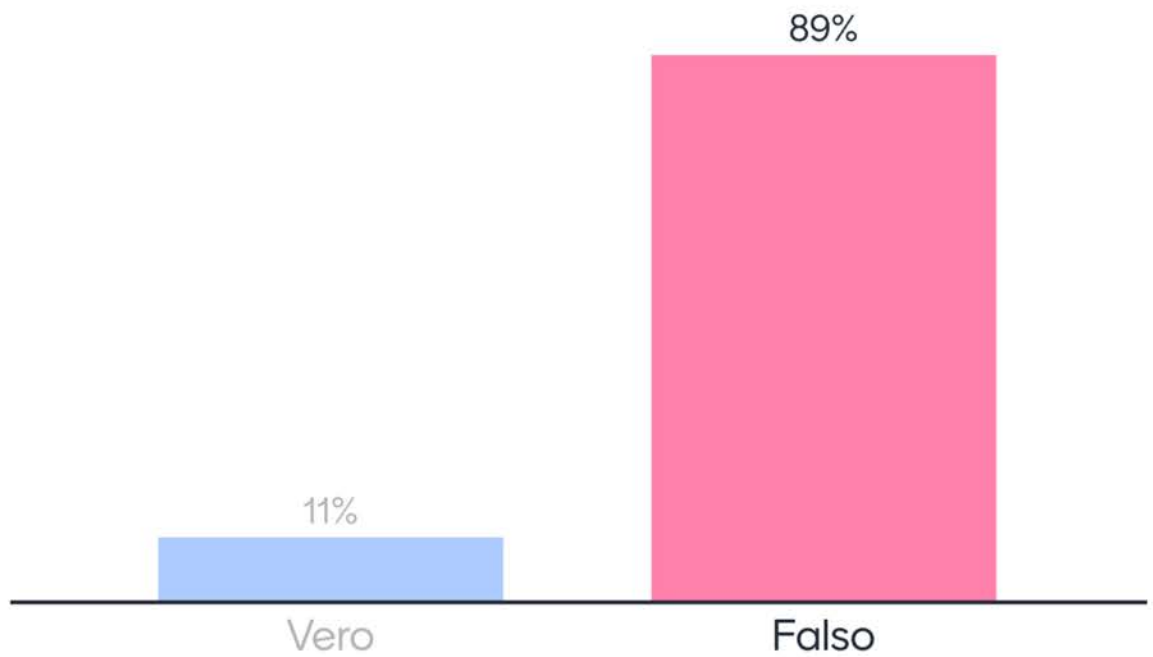
Mentimeter

	Prezzo basso	Prezzo alto
Prezzo basso	(48%,12%)	(60%,40%)
Prezzo alto	(40%,60%)	(32%,8%)

19

In questo gioco la compagnia 2 ha una strategia strettamente dominante

Mentimeter



19

Il dilemma del prigioniero

	confessa	non confessa
confessa	(-1, -1)	(-10, 0)
non confessa	(0,- 10)	(-5, -5)

La tragedia dei beni comuni

«Se una persona conduce al pascolo più capi di bestiame nel proprio campo, la quantità di erba che viene consumata è sottratta da quella inizialmente a disposizione; inoltre, se precedentemente l'erba presente nel pascolo era appena sufficiente, allora il pastore non trarrà alcun beneficio dal condurre un maggior numero di capi di bestiame, dato che ciò che viene guadagnato in un modo viene perso in un altro. Ma se mette più capi di bestiame in un pascolo comune, l'erba consumata forma una perdita che è indirettamente condivisa tra tutto il bestiame, sia quello altrui che il proprio, in proporzione al loro numero, ma solo una piccola parte di questa perdita colpisce il proprio bestiame. In un pascolo chiuso, vi è un punto di saturazione, se così posso chiamarlo, una sorta di impedimento funzionale, oltre al quale nessun pastore prudente aggiungerà altro bestiame. Anche in un pascolo comune c'è alla stessa maniera un punto di saturazione. Ma la posizione di questo punto nei due casi è ovviamente differente. Se un numero di pascoli confinanti, già completamente pieni, fossero in una volta aperti e convertiti in un unico campo, la posizione del punto di saturazione cambierebbe immediatamente»

Il beneficio di aumentare di una unità il bestiame al pascolo è superiore alla diminuzione del bene comune (erba) che viene invece ripartito tra tutti i pastori presenti. Da qui l'incentivo individuale ad aumentare sempre più i capi di bestiame che si portano al pascolo fino alla distruzione del pascolo.

La battaglia dei sessi

	(2, 1)	(0, 0)
	(0, 0)	(1, 2)

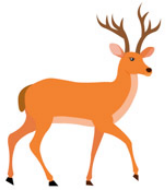
- Lei preferisce stare a casa a vedere la partita, lui preferisce andare a teatro
- Entrambi preferiscono essere in compagnia piuttosto che da soli
- Quanti sono gli equilibri di Nash?

La battaglia dei sessi

	(2, 1)	(0, 0)
	(0, 0)	**(1, 2)**

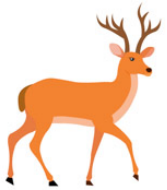
- Lei preferisce stare a casa a vedere la partita, lui preferisce andare a teatro
- Entrambi preferiscono essere in compagnia piuttosto che da soli
- Quanti sono gli equilibri di Nash? **Due, simmetrici**

A caccia!

		
	(1, 1)	(1, 0)
	(0, 1)	(5, 5)

- Una coppia di amici sta andando a caccia. Ognuno può decidere se andare a cacciare un cervo o una lepre, ogni cacciatore può catturare da solo la lepre, invece per catturare il cervo deve esserci anche il suo compagno.
- Ovviamente è meglio catturare un cervo di una lepre, ma è meglio prendere una lepre che non prendere nulla
- Quanti sono gli equilibri di Nash?

A caccia!

		
	(1, 1)	(1, 0)
	(0, 1)	**(5, 5)**

- Una coppia di amici sta andando a caccia. Ognuno può decidere se andare a cacciare un cervo o una lepre, ogni cacciatore può catturare da solo la lepre, invece per catturare il cervo deve esserci anche il suo compagno.
- Ovviamente è meglio catturare un cervo di una lepre, ma è meglio prendere una lepre che non prendere nulla
- Quanti sono gli equilibri di Nash? **Due.**

Sasso carta forbice

	(0, 0)	(-1, 1)	(1, -1)
	(1, -1)	(0, 0)	(-1, 1)
	(-1, 1)	(1, -1)	(0, 0)

- Sasso batte forbice
  Forbice batter carta
  Carta batte sasso

- Vincita = +1
  Perdita = -1
  Pareggio = 0

- Quanti sono gli equilibri di Nash?

Sasso carta forbice

	(0, 0)	(-1, 1)	(1, -1)
	(1, -1)	(0, 0)	(-1, 1)
	(-1, 1)	(1, -1)	(0, 0)

- Sasso batte forbice
  Forbice batter carta
  Carta batte sasso

- Vincita = +1
  Perdita = -1
  Pareggio = 0

- Quanti sono gli equilibri di Nash?
  Non ce ne sono!

E quindi?