Giochi cooperativi

Monica Salvioli

18 Marzo 2021

Perché?

- La teoria introdotta finora non è sufficiente per descrivere tutte le situazioni che prevedono l'interazione tra agenti razionali
- Per esempio, ci sono situazioni in cui vari agenti possono stringere accordi (vincolanti) per ottenere vantaggi personali e collettivi

Perché?

- La teoria introdotta finora non è sufficiente per descrivere tutte le situazioni che prevedono l'interazione tra agenti razionali
- Per esempio, ci sono situazioni in cui vari agenti possono stringere accordi (**vincolanti**) per ottenere vantaggi personali e collettivi

Perché?

- La teoria introdotta finora non è sufficiente per descrivere tutte le situazioni che prevedono l'interazione tra agenti razionali
- Per esempio, ci sono situazioni in cui vari agenti possono stringere accordi (**vincolanti**) per ottenere vantaggi personali e collettivi
- Suddivisione spese comuni, accordi tra compratori e venditori, coalizioni nel governo…

Giochi cooperativi a utilità trasferibile

- Anche detti **TU games** o **giochi a pagamenti laterali**
- Nei giochi della teoria non cooperativa ogni giocatore aveva la sua funzione di utilità, non cercavamo di compararle.

		
	(10, 10)	(1, -1)
	(1, -1)	(0, 0)

Giochi cooperativi a utilità trasferibile

- Anche detti **TU games** o **giochi a pagamenti laterali**
- Nei giochi della teoria non cooperativa ogni giocatore aveva la sua funzione di utilità, non cercavamo di compararle.

		
	(10, 10)	(1, -1)
	(1, -1)	(0, 0)

- Invece in questo caso c'è una scala comune per le funzioni di utilità
- Se l'utilità è espressa, per esempio, in termini di quantità di denaro, allora può essere scambiata e divisa tra i giocatori.

Giochi cooperativi a utilità trasferibile

- Le ipotesi che abbiamo fatto precedentemente sul comportamento dei giocatori sono ancora valide: ogni giocatore cerca di ottenere il meglio per sé.

- La teoria non cooperativa si concentra sul giocatore e sulle sue strategie, mentre la teoria cooperativa guarda all'utilità che i giocatori possono raggiungere collaborando e stringendo accordi vincolanti.

Giocatori e coalizioni

- Siamo interessati al risultato che i giocatori possono ottenere giocando da soli o…collaborando

Giocatori e coalizioni

- Siamo interessati al risultato che i giocatori possono ottenere giocando da soli o…collaborando

Definizione: Dato un insieme $N = \{1,2, \dots ,n\}$ di giocatori, chiamiamo coalizione ogni sottoinsieme $A \subseteq N$ e indichiamo con $P(N)$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di N (incluso l'insieme vuoto).

Giocatori e coalizioni

- Siamo interessati al risultato che i giocatori possono ottenere giocando da soli o…collaborando

Definizione: Dato un insieme $N = \{1,2, \dots ,n\}$ di giocatori, chiamiamo coalizione ogni sottoinsieme $A \subseteq N$ e indichiamo con $P(N)$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di N (incluso l'insieme vuoto).

Dato un insieme di n giocatori, quante sono le coalizioni possibili?

Giocatori e coalizioni

- Siamo interessati al risultato che i giocatori possono ottenere giocando da soli o…collaborando

Definizione: Dato un insieme $N = \{1,2, \dots ,n\}$ di giocatori, chiamiamo coalizione ogni sottoinsieme $A \subseteq N$ e indichiamo con $P(N)$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di N (incluso l'insieme vuoto).

Dato un insieme di n giocatori, quante sono le coalizioni possibili?

Si può dimostrare che sono esattamente 2^n.

Giocatori e coalizioni

Le coalizioni formate da 0 elementi sono: una sola, l'insieme vuoto

Le coalizioni formate da 1 elemento sono: $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$

Le coalizioni formate da 2 elementi sono: $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$

…

Le coalizioni formate da k elementi sono: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

…

Le coalizioni formate da n elementi sono: $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\ 0!} = 1$

E sappiamo che

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Giocatori e coalizioni

Le coalizioni formate da 0 elementi sono: una sola, l'insieme vuoto

Le coalizioni formate da 1 elemento sono: $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$

Le coalizioni formate da 2 elementi sono: $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$

…

Le coalizioni formate da k elementi sono: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

…

Le coalizioni formate da n elementi sono: $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1$

E sappiamo che

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

NOTA: Sono coalizioni anche quelle fatte da un solo giocatore, o dall'insieme di tutti i giocatori (in questo caso si parla di grande coalizione).

Il duetto

Giulia ha una bella voce e, per arrotondare, canta in un locale ogni venerdì sera per 100 euro. Il suo amico Paolo invece si diletta a suonare la chitarra, e anche lui arrotonda suonando in un altro locale per 150 euro a serata.
In città apre un nuovo locale che vorrebbe organizzare delle serate con chitarra e voce e il proprietario del locale offre a Giulia e Paolo 400 euro per ogni serata.

Come potrebbero dividersi il denaro?

E se fossero 3?

Giulia e Paolo hanno un'amica, Viola, che suona le percussioni. Anche lei è solita esibirsi nei locali e lo fa per 200 euro. I tre amici potrebbero decidere di suonare tutti insieme, oppure formare dei duetti…

E se fossero 3?

100

400

150

300

600

200

400

Definizione di gioco cooperativo a utilità trasferibile

- $N = \{1,2, \dots ,n\}$ insieme dei giocatori
- $P(N)$ insieme delle coalizioni
- una funzione v: $P(N) \to \mathbb{R}$, con la proprietà che $v(\emptyset) = 0$. La funzione v viene detta **funzione caratteristica** del gioco.

Definizione di gioco cooperativo a utilità trasferibile

- $N = \{1,2, \dots ,n\}$ insieme dei giocatori
- $P(N)$ insieme delle coalizioni
- una funzione v: $P(N) \to \mathbb{R}$, con la proprietà che $v(\emptyset) = 0$. La funzione v viene detta **funzione caratteristica** del gioco.

Definizione: La coppia (N, v) definisce un gioco cooperativo a utilità trasferibile.

Definizione di gioco cooperativo a utilità trasferibile

- $N = \{1,2, \dots ,n\}$ insieme dei giocatori
- $P(N)$ insieme delle coalizioni
- una funzione v: $P(N) \to \mathbb{R}$, con la proprietà che $v(\emptyset) = 0$. La funzione v viene detta **funzione caratteristica** del gioco.

Definizione: La coppia (N, v) definisce un gioco cooperativo a utilità trasferibile.

Interpretazione: per ogni coalizione $A \subseteq N$, $v(A)$ rappresenta un valore assegnato alla coalizione A, cioè quanto la coalizione è in grado di garantirsi.

$v(A)$ può essere un costo o un guadagno a seconda del gioco che consideriamo.

Funzione caratteristica nel gioco del duetto

$$v : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$$

$$v(\emptyset) = 0$$

$$v(\{\text{Giulia}\}) = 100$$

$$v(\{\text{Paolo}\}) = 150$$

$$v(N) = v(\{\text{Giulia}, \text{Paolo}\}) = 400$$

Gioco di maggioranza

Ci sono tre giocatori che devono prendere una decisione a maggioranza.

$N = \{1,2,3\}$

$v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$

$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = v(\{1,2,3\}) = 1$

Il gioco dei guanti

Ci sono tre giocatori, uno ha un guanto sinistro e due un guanto destro. Naturalmente, un guanto spaiato non è utile, quindi assumiamo che lo scopo del gioco sia formare paia di guanti. Che funzione caratteristica scegliamo?

Per esempio, quella che assegna a ogni coalizione il numero di paia di guanti che riesce a formare. Si ha quindi:

D D S

$$N = \{1,2,3\}$$

$$v(\emptyset) = v(\{i\}) = v(\{1,2\}) = 0$$

$$v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = v(N) = 1$$

Giochi superadditivi

Definizione: Consideriamo un gioco (N, v). Siano A e B due coalizioni tali che $A \cap \mathrm{B} = \emptyset$. Il gioco si definisce superadditivo se $v(A \cup B) \geq v(A) + v(B)$ per ogni A, B.

Interpretazione: la superadditività significa che ogni coppia di gruppi di giocatori ha vantaggio a confluire in un solo gruppo. In particolare quindi il massimo vantaggio si ha a stare tutti assieme.


QUIZ!

Questo gioco è superadditivo?

Mentimeter

100

400

150

300

600

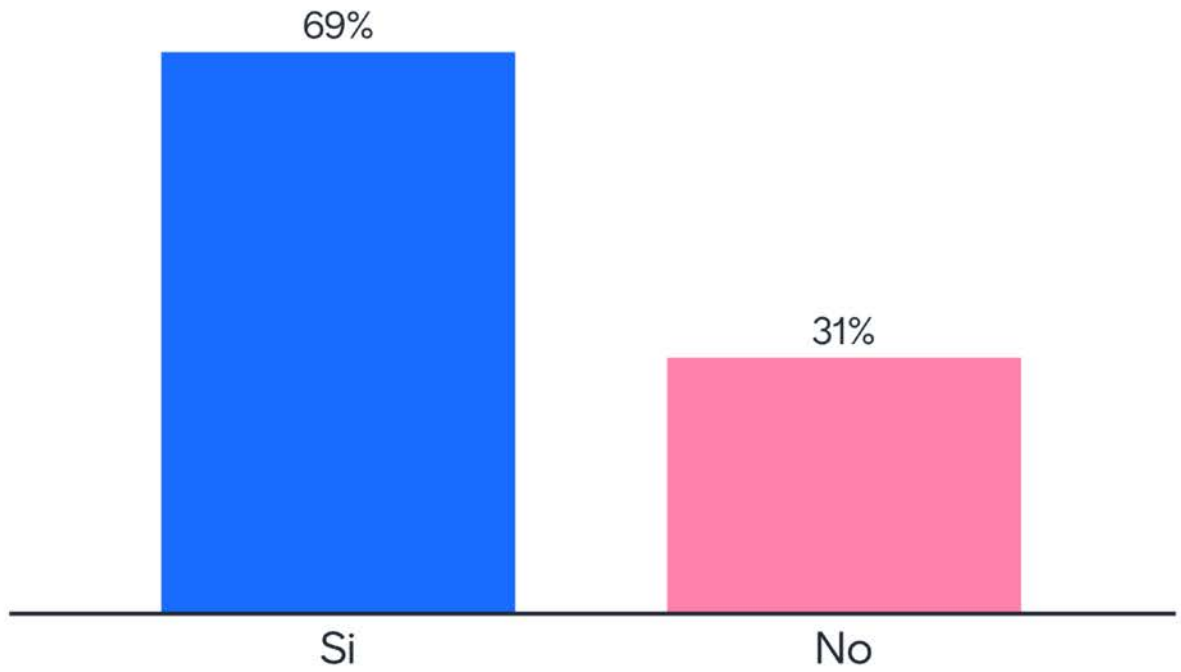
200

400

16

Questo gioco è superadditivo?

Mentimeter



16

Soluzioni

- Come ci immaginiamo la soluzione di un gioco cooperativo?
- Visto che v rappresenta generalmente un guadagno (o un costo), ci aspettiamo che una soluzione di un gioco cooperativo ci dica come spartire questi guadagni (o costi) tra i giocatori

Definizione: Un vettore soluzione di un gioco cooperativo con n giocatori è un vettore $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ che rappresenta una distribuzione di costi o utilità: x_i è quanto il vettore soluzione assegna al giocatore i.

Soluzioni: esempi

- dividere delle spese -> quanto ciascuno deve pagare
- gestire una bancarotta -> quanto rimborsare ad ogni creditore
- organi di governo -> valutare il potere di ogni rappresentante

Soluzioni in teoria cooperativa

- Diversamente dal caso non-cooperativo, dove l'idea di equilibrio di Nash, o di induzione a ritroso, sono praticamente l'unica vera idea di soluzione, nel caso cooperativo la teoria non dice quale deve essere la soluzione.

Soluzioni in teoria cooperativa

- Diversamente dal caso non-cooperativo, dove l'idea di equilibrio di Nash, o di induzione a ritroso, sono praticamente l'unica vera idea di soluzione, nel caso cooperativo la teoria non dice quale deve essere la soluzione.
- Tutto dipende da cosa abbiamo in mente, che tipo di soluzione cerchiamo, da quali proprietà ci aspettiamo che soddisfi.
- In alcuni casi potremmo trovare più soluzioni che rispondono alle nostre richieste, in altri una sola, in altri nessuna...
- Noi vedremo due concetti di soluzione: il **nucleo** e il **valore Shapley**.

Imputazioni

Consideriamo un gioco a utilità trasferibile con n giocatori, (N, v):

- Un elemento $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ si chiama allocazione.
- Se una allocazione x verifica

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$$

  allora x viene detta **pre-imputazione**.
- Una pre-imputazione che soddisfa anche la proprietà

$$x_i \geq v(\{i\}) \quad \forall i \in N$$

  viene detta **imputazione**.

Imputazioni: interpretazione

- Nei giochi superadditivi tende a formarsi la grande coalizione, quindi è ragionevole pensare a una soluzione come a una ripartizione di $v(N)$ tra i giocatori
- Le pre-imputazioni e le imputazioni lo sono
- La condizione $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$ si può scomporre in:
    - $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq v(N)$ (fattibilità)
    - $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq v(N)$ (efficienza/razionalità collettiva)
- La condizione $x_i \geq v(\{i\})$ è invece una condizione di razionalità individuale per il giocatore i.

Imputazioni: osservazione

- L’idea di imputazione è un concetto di soluzione molto ragionevole, ma utilizza solamente una parte delle informazioni fornite dalla funzione caratteristica che descrive il gioco.
- La definizione di imputazione prende in considerazione il valore delle coalizioni formate da un singolo giocatore e quello della coalizione formata da tutti i giocatori, ma non i valori assegnati alle altre coalizioni.

Imputazioni: osservazione

- L’idea di imputazione è un concetto di soluzione molto ragionevole, ma utilizza solamente una parte delle informazioni fornite dalla funzione caratteristica che descrive il gioco.
- La definizione di imputazione prende in considerazione il valore delle coalizioni formate da un singolo giocatore e quello della coalizione formata da tutti i giocatori, ma non i valori assegnati alle altre coalizioni.
- Viene naturale allora pensare di tenere conto anche di quanto possono fare tutte le coalizioni.


QUIZ!

Quale di queste è un'imputazione per il gioco del duetto?

Mentimeter

100

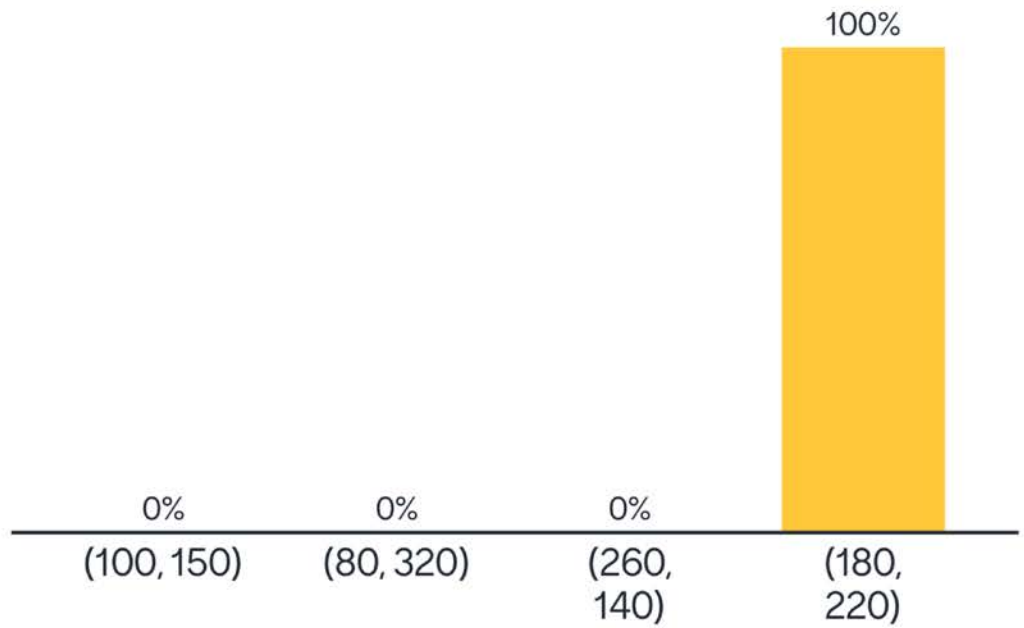
150

400

12

Quale di queste è un'imputazione per il gioco del duetto?

Mentimeter



12

Il nucleo

- La prima condizione della definizione di imputazione impone che non vengano sollevate obiezioni da parte della grande coalizione, in quanto tutto viene distribuito
- La seconda condizione della definizione di imputazione impone che non vengano sollevate obiezioni da parte dei singoli.
- Viene naturale allora pensare di tenere conto anche di quanto possono fare tutte le coalizioni. È una sorta di ‘razionalità intermedia’.

Il nucleo

Definizione: Si chiama nucleo del gioco (N, v) l'insieme di tutte le allocazioni che soddisfano le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \ \ \forall S \subset N \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = v(N) \end{cases}$$

cioè sono verificate:

- razionalità individuale
- razionalità delle coalizioni
- efficienza

Il nucleo nel gioco del duetto

100

150

400

NUCLEO

$(x, 400-x)$

$100 \leq x \leq 400-150 = 250$


QUIZ!

Quale è il nucleo di questo gioco?

Mentimeter

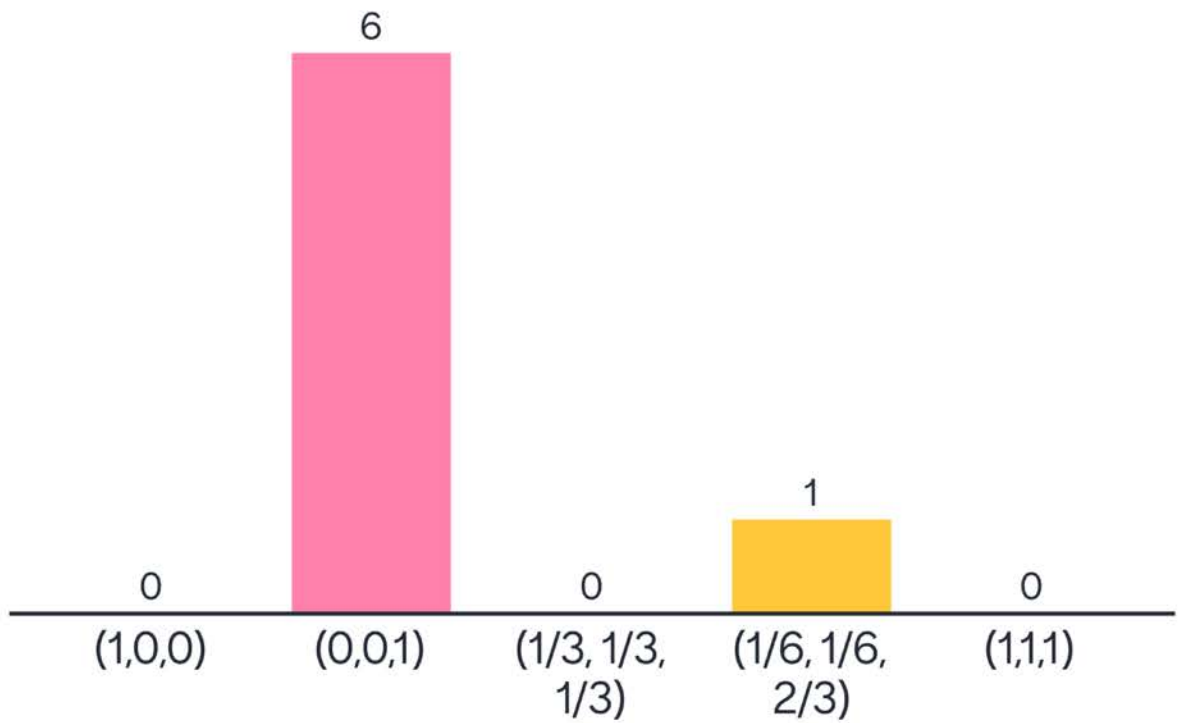
Due venditori e un compratore

$$v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{1,2\}) = 0$$
$$v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = v(N) = 1$$

7

Quale è il nucleo di questo gioco?

Mentimeter



7

Il nucleo nel gioco dei guanti

D D S

$$N = \{1,2,3\}$$

$$v(\emptyset) = v(\{i\}) = v(\{1,2\}) = 0$$

$$v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = v(N) = 1$$

Il nucleo nel gioco dei guanti

$$v(\emptyset) = v(1) = v(2) = v(3) = v(1,2) = 0$$

$$v(1,3) = v(2,3) = v(N) = 1$$

$$(x_1, x_2, x_3)$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 0 & x_1 + x_3 \geq 1 & x_2 + x_3 \geq 1 \\ \cancel{x_1} + \cancel{x_2} + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 1$$

$$(0, 0, 1)$$

Il nucleo nel gioco di maggioranza

Il nucleo nel gioco di maggioranza

Considerazioni

- Il concetto di nucleo è sicuramente interessante, ma, come abbiamo visto, non sempre propone delle soluzioni.

- Inoltre, anche quando il nucleo propone soluzioni, alcune di queste sembrano "ingiuste".

- Per esempio, nel gioco dei guanti viene assegnato 0 a chi possiede un guanto destro. È vero che i guanti destri sono sovrabbondanti, ma il giocatore che possiede un guanto sinistro ha comunque bisogno di un guanto destro, e il nucleo non tiene conto di questo.