EQUILIBRI di Nash in strategie miste e equilibri correlati

Monica Salvioli

11 Marzo 2021

Humilitas
VICTRIX INVICTA
ALMO COLLEGIO BORROMEO
1561 2021 460

UNIVERSITÀ DI PAVIA

UNIVERSITÀ DI TRENTO

Nella puntata precedente…

- Giochi a due giocatori in forma strategica: cosa serve per definirli
- Strategie strettamente e debolmente dominate
- Definizione di equilibrio di Nash
- Come trovare gli equilibri di Nash
- Alcuni esempi

Le due carte

- Ogni giocatore ha in mano una carta rossa e una carta nera
- Contemporaneamente i due giocatori scartano una delle due carte
- Se le due carte scartate sono dello stesso colore il primo giocatore guadagna un punto
- Se sono di colore diverso è il secondo a guadagnare un punto
- Scriviamo la matrice del gioco

Le due carte

	ROSSA	NERA
ROSSA	(1, 0)	(0, 1)
NERA	(0, 1)	(1, 0)

Cerchiamo gli equilibri di Nash di questo gioco…


QUIZ!

Quanti sono gli equilibri di Nash di questo gioco?

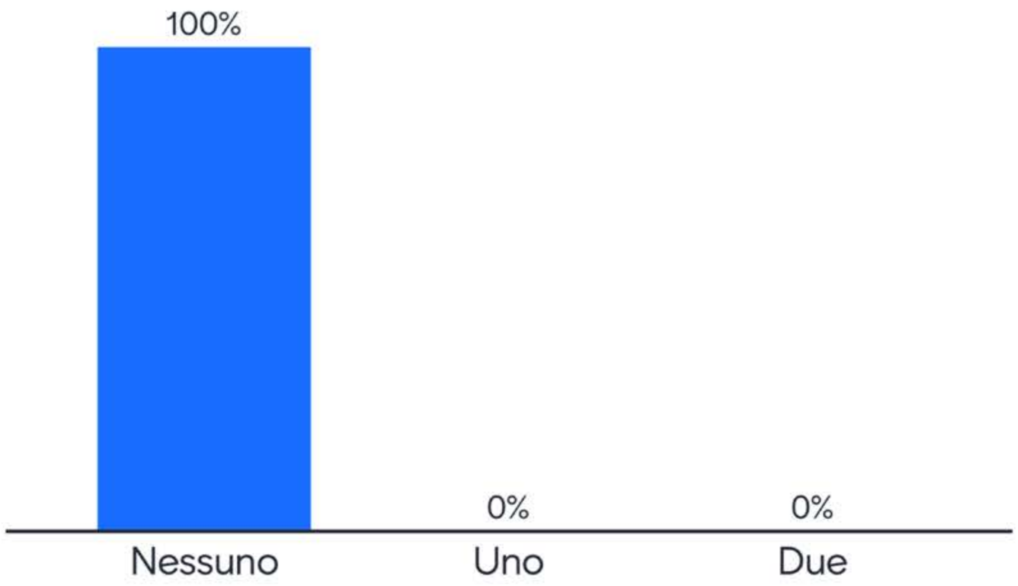
Mentimeter

	ROSSA	NERA
ROSSA	(1, 0)	(0, 1)
NERA	(0, 1)	(1, 0)

14

Quanti sono gli equilibri di Nash di questo gioco?

Mentimeter



14

Le due carte

	ROSSA	NERA
ROSSA	(1, 0)	(0, 1)
NERA	(0, 1)	(1, 0)

Non riusciamo a trovare due strategie che siano una la scelta ottimale rispetto all'altra e viceversa…non c'è equilibrio…

Le due carte

	ROSSA	NERA
ROSSA	(1, 0)	(0, 1)
NERA	(0, 1)	(1, 0)

Se ci trovassimo a giocare questo gioco di sicuro non decideremmo di scartare sempre le carte di un solo colore, altrimenti chi ci osserva capirebbe la nostra strategia e sceglierebbe la sua in modo da vincere sempre…

Non sempre è ottimale selezionare a priori una strategia e attenersi ad essa ogni volta che si gioca!

Dobbiamo abbandonare l’idea di definire un comportamento razionale in questo caso?

No, ma dovremo **ampliare** la nostra definizione di equilibrio.

Equilibri in strategie miste

- Decidiamo di ampliare lo spazio delle strategie dei giocatori introducendo una distribuzione di probabilità sulle possibili scelte

- Queste nuove strategie dei giocatori vengono chiamate strategie miste

- A ogni strategia pura (= strategia di partenza) viene associato un valore che rappresenta la probabilità con cui viene giocata quella strategia.

- A questo punto le strategie dei giocatori consistono nello stabilire la probabilità con cui scegliere le strategie del gioco iniziale

Equilibri in strategie miste

- In pratica, l’idea è di giocare diversificando le nostre azioni.
- Per esempio, potremmo tirare una moneta prima di ogni giocata:
  - se viene testa, scartiamo la carta rossa
  - se viene croce, scartiamo la carta nera
- Questo significa associare una distribuzione di probabilità alle azioni che si possono compiere. In questo esempio, la distribuzione di probabilità potrebbe essere espressa come (1/2, 1/2)
- In questo modo, il nostro avversario non ha nessuna strategia che gli permetta di avere un vantaggio su di noi. Entrambi vinceremo o perderemo in media metà delle volte.

Formalizziamo

- Dato un gioco finito (con un numero finito di giocatori e strategie), la sua estensione in strategie miste è un gioco in cui:
  - I giocatori sono sempre gli stessi
  - L’insieme delle strategie di ogni giocatore è l’insieme delle distribuzioni di probabilità sulle **strategie pure** del gioco di partenza
  - Le funzioni di utilità dei giocatori sono calcolate come **valore atteso**

Come si trovano gli equilibri in miste?

		q	$1-q$
		ROSSA	**NERA**
p	**ROSSA**	(1, 0)	(0, 1)
$1-p$	**NERA**	(0, 1)	(1, 0)

- Visto che ciascun giocatore ha solo due strategie a disposizione, giocherà la prima con una certa probabilità p e la seconda con probabilità $1-p$
- Indicheremo le strategie disposizione del primo giocatore con $(p, 1-p)$
- Il primo giocatore deciderà di mostrare la carta rossa con probabilità p e di mostrare la carta nera con probabilità $1-p$
- Allo stesso modo indicheremo le strategie del secondo giocatore con $(q, 1-q)$

Come si trovano gli equilibri in miste?

		q	$1-q$
		ROSSA	**NERA**
p	**ROSSA**	(1, 0)	(0, 1)
$1-p$	**NERA**	(0, 1)	(1, 0)

pq	$p(1-q)$
$(1-p)q$	$(1-p)(1-q)$

Probabilità che si verifichi ciascun esito del gioco

- Dobbiamo ora calcolare le funzioni di utilità dei giocatori, come valori attesi
- Dobbiamo verificare quale sia la probabilità di ritrovarsi in ciascuno degli esiti possibili
- Per esempio, la probabilità che entrambi giochino la carta rossa è uguale al prodotto tra la probabilità che il primo giocatore mostri la carta rossa e la probabilità che anche il secondo faccia questa scelta, quindi pq

Come si trovano gli equilibri in miste?

		q	$1-q$
		ROSSA	**NERA**
p	**ROSSA**	(1, 0)	(0, 1)
$1-p$	**NERA**	(0, 1)	(1, 0)

pq	$p(1-q)$
$(1-p)q$	$(1-p)(1-q)$

Probabilità che si verifichi ciascun esito del gioco

Per calcolare le funzioni di utilità dei giocatori, moltiplichiamo quanto otterrebbero in un determinato esito del gioco per la probabilità che quello stesso esito venga giocato.

Come si trovano gli equilibri in miste?

		q	$1-q$
		ROSSA	**NERA**
p	**ROSSA**	(1, 0)	(0, 1)
$1-p$	**NERA**	(0, 1)	(1, 0)

$\boldsymbol{pq}$	$p(1-q)$
$(1-p)q$	$(1-p)(1-q)$

Probabilità che si verifichi ciascun esito del gioco

Per calcolare le funzioni di utilità dei giocatori, moltiplichiamo quanto otterrebbero in un determinato esito del gioco per la probabilità che quello stesso esito venga giocato.

Per il primo giocatore:

$$f(p,q) = \boldsymbol{pq} * \mathbf{1}$$

Come si trovano gli equilibri in miste?

		q	$1-q$
		ROSSA	**NERA**
p	**ROSSA**	(1, 0)	(0, 1)
$1-p$	**NERA**	(0, 1)	(1, 0)

$\boldsymbol{pq}$	$\boldsymbol{p(1-q)}$
$(1-p)q$	$(1-p)(1-q)$

Probabilità che si verifichi ciascun esito del gioco

Per calcolare le funzioni di utilità dei giocatori, moltiplichiamo quanto otterrebbero in un determinato esito del gioco per la probabilità che quello stesso esito venga giocato.

Per il primo giocatore:

$$f(p,q) = \boldsymbol{pq} * \boldsymbol{1} + \boldsymbol{p(1-q)} * \boldsymbol{0}$$

Come si trovano gli equilibri in miste?

			q	$1-q$
			ROSSA	**NERA**
p	**ROSSA**		(1, 0)	(0, 1)
$1-p$	**NERA**		(0, 1)	(1, 0)

$\boldsymbol{pq}$	$\boldsymbol{p(1-q)}$
$\boldsymbol{(1-p)q}$	$(1-p)(1-q)$

Probabilità che si verifichi ciascun esito del gioco

Per calcolare le funzioni di utilità dei giocatori, moltiplichiamo quanto otterrebbero in un determinato esito del gioco per la probabilità che quello stesso esito venga giocato.

Per il primo giocatore:

$$f(p,q) = \boldsymbol{pq} * \mathbf{1} + \boldsymbol{p(1-q)} * \mathbf{0} + \boldsymbol{(1-p)q} * \mathbf{0}$$

Come si trovano gli equilibri in miste?

		q	$1-q$
		ROSSA	**NERA**
p	**ROSSA**	(1, 0)	(0, 1)
$1-p$	**NERA**	(0, 1)	(1, 0)

pq	$p(1-q)$
$(1-p)q$	$(1-p)(1-q)$

Probabilità che si verifichi ciascun esito del gioco

Per calcolare le funzioni di utilità dei giocatori, moltiplichiamo quanto otterrebbero in un determinato esito del gioco per la probabilità che quello stesso esito venga giocato.

Per il primo giocatore:

$$f(p,q) = pq * 1 + p(1-q) * 0 + (1-p)q * 0 + (1-p)(1-q) * 1$$

Come si trovano gli equilibri in miste?

		q	$1-q$
		ROSSA	NERA
p	ROSSA	(1, 0)	(0, 1)
$1-p$	NERA	(0, 1)	(1, 0)

pq	$p(1-q)$
$(1-p)q$	$(1-p)(1-q)$

Probabilità che si verifichi ciascun esito del gioco

Per calcolare le funzioni di utilità dei giocatori, moltiplichiamo quanto otterrebbero in un determinato esito del gioco per la probabilità che quello stesso esito venga giocato.

Per il primo giocatore:

$$f(p,q) = pq * 1 + p(1-q) * 0 + (1-p)q * 0 + (1-p)(1-q) * 1$$

Per il secondo:

$$g(p,q) = pq * 0 + p(1-q) * 1 + (1-p)q * 1 + (1-p)(1-q) * 0$$

Come si trovano gli equilibri in miste?

		q	$1-q$
		ROSSA	NERA
p	ROSSA	(1, 0)	(0, 1)
$1-p$	NERA	(0, 1)	(1, 0)

pq	$p(1-q)$
$(1-p)q$	$(1-p)(1-q)$

Probabilità che si verifichi ciascun esito del gioco

Per calcolare le funzioni di utilità dei giocatori, moltiplichiamo quanto otterrebbero in un determinato esito del gioco per la probabilità che quello stesso esito venga giocato.

Per il primo giocatore:

$$f(p,q) = 2pq + 1 - p - q$$

Per il secondo:

$$g(p,q) = p + q - 2pq$$

Come si trovano gli equilibri in miste?

		q	$1-q$
		ROSSA	**NERA**
p	**ROSSA**	(1, 0)	(0, 1)
$1-p$	**NERA**	(0, 1)	(1, 0)

pq	$p(1-q)$
$(1-p)q$	$(1-p)(1-q)$

Probabilità che si verifichi ciascun esito del gioco

Questo nuovo gioco tra due giocatori con strategie $(p, 1-p)$ e $(q, 1-q)$ e funzioni di utilità

$$f(p,q) = 2pq + 1 - p - q$$

e

$$g(p,q) = p + q - 2pq$$

rappresenta l'estensione mista del gioco di partenza.

Considerando questa estensione, possiamo applicare il concetto di equilibrio di Nash.

Come si trovano gli equilibri in miste?

Parto dal primo giocatore.

$$f(p,q) = 2pq + 1 - p - q = p(2q - 1) + 1 - q$$

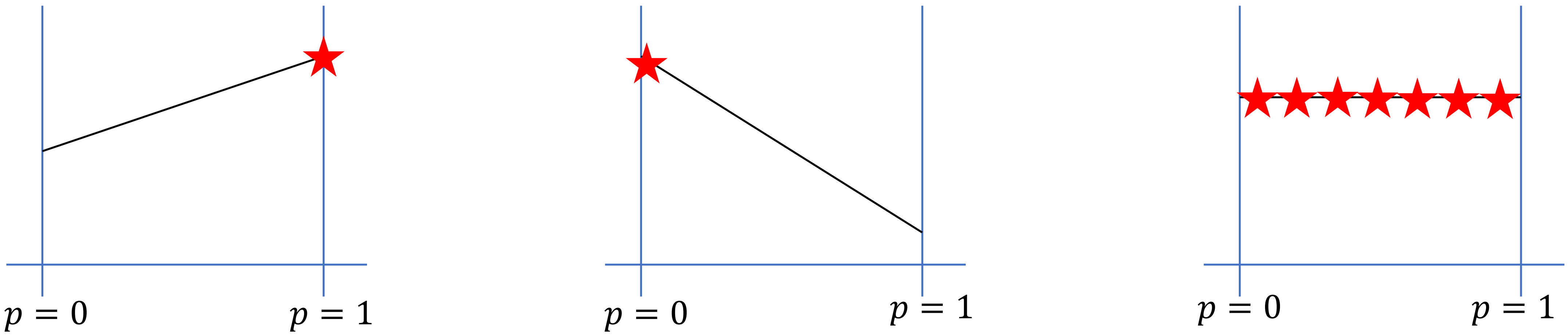
Quindi ho una funzione di p, di cui voglio trovare il massimo.

Come si trovano gli equilibri in miste?

Parto dal primo giocatore.

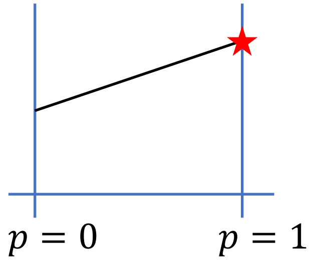
$$f(p,q) = 2pq + 1 - p - q = p(2q-1) + 1 - q$$

Quindi ho una funzione di p, di cui voglio trovare il massimo. Tre possibilità:

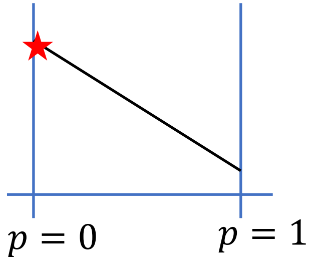


Come si trovano gli equilibri in miste?

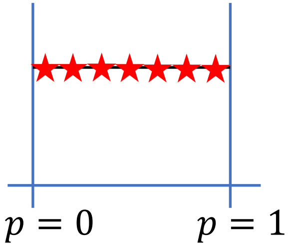
Tutto dipende dal coefficiente angolare $(2q-1)$:



- Se $2q-1>0$, cioè $q>\frac{1}{2}$, allora siamo nel primo caso e la miglior risposta del primo giocatore sarà $p=1$;



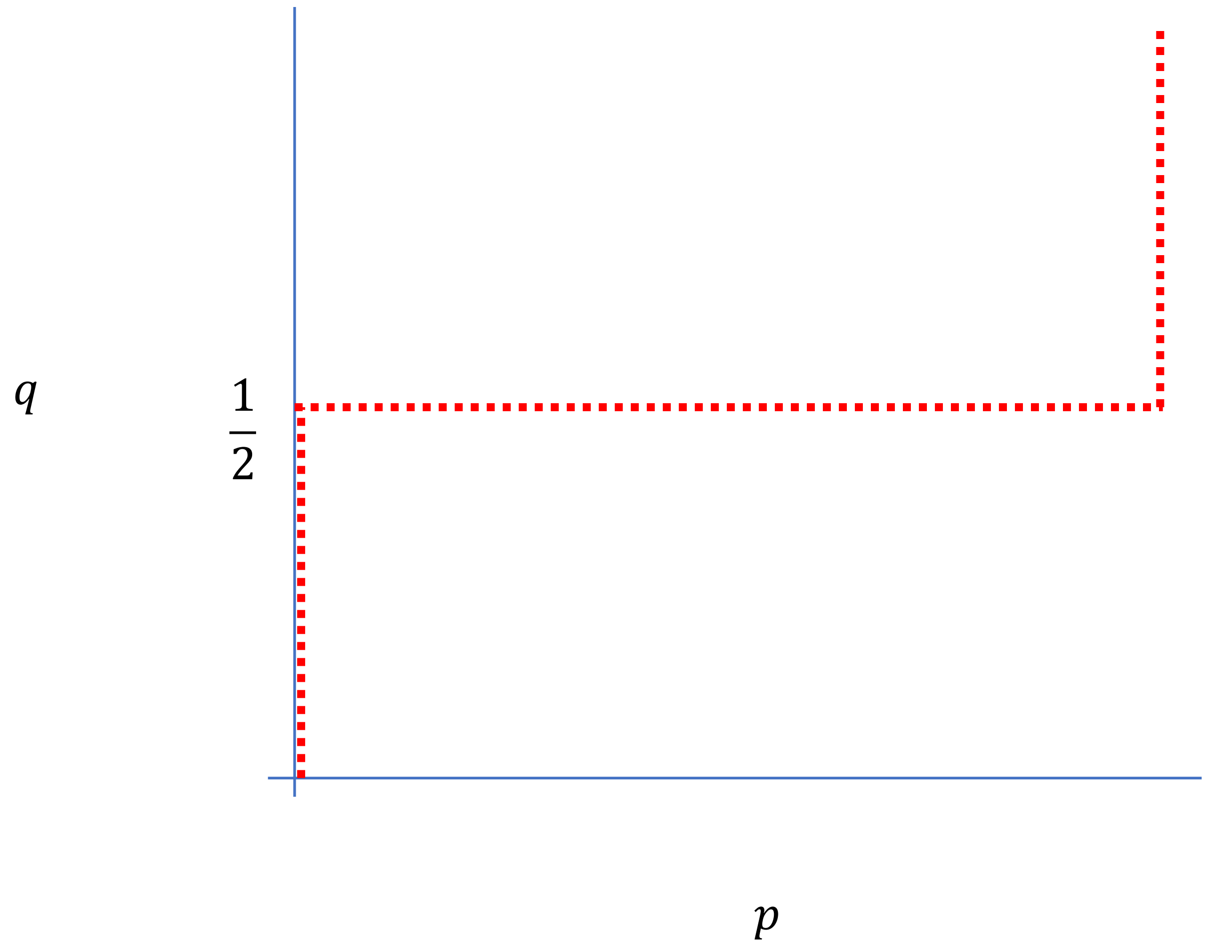
- Se $2q-1<0$, cioè $q<\frac{1}{2}$, allora siamo nel secondo caso e la miglior risposta del primo giocatore sarà $p=0$;



- Se $2q-1=0$, cioè $q=\frac{1}{2}$, allora siamo nel secondo caso e ogni $p\in[0,1]$ sarà una miglior risposta

Come si trovano gli equilibri in miste?

Riassumendo:

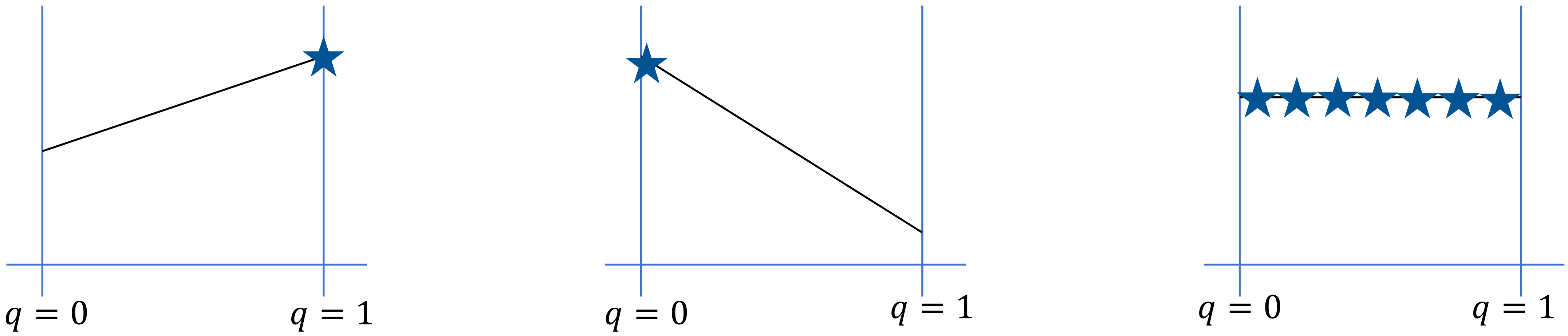


Come si trovano gli equilibri in miste?

Consideriamo ora il secondo giocatore

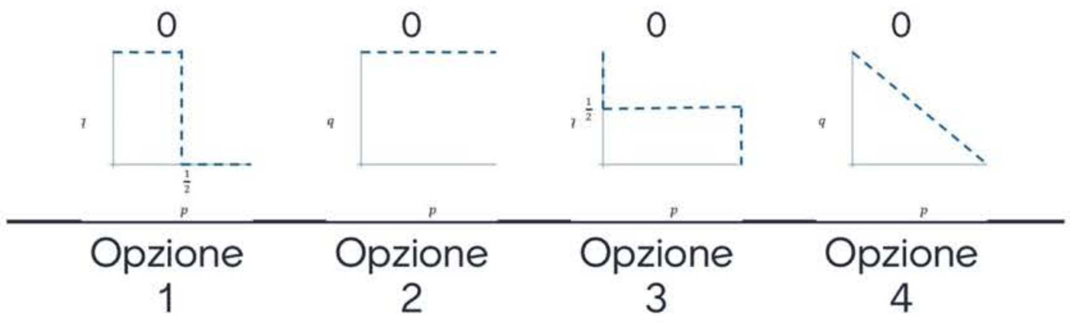
$$g(p,q) = p + q - 2pq = q(1-2p) + p$$

Quindi ho una funzione di q, di cui voglio trovare il massimo. Tre possibilità:



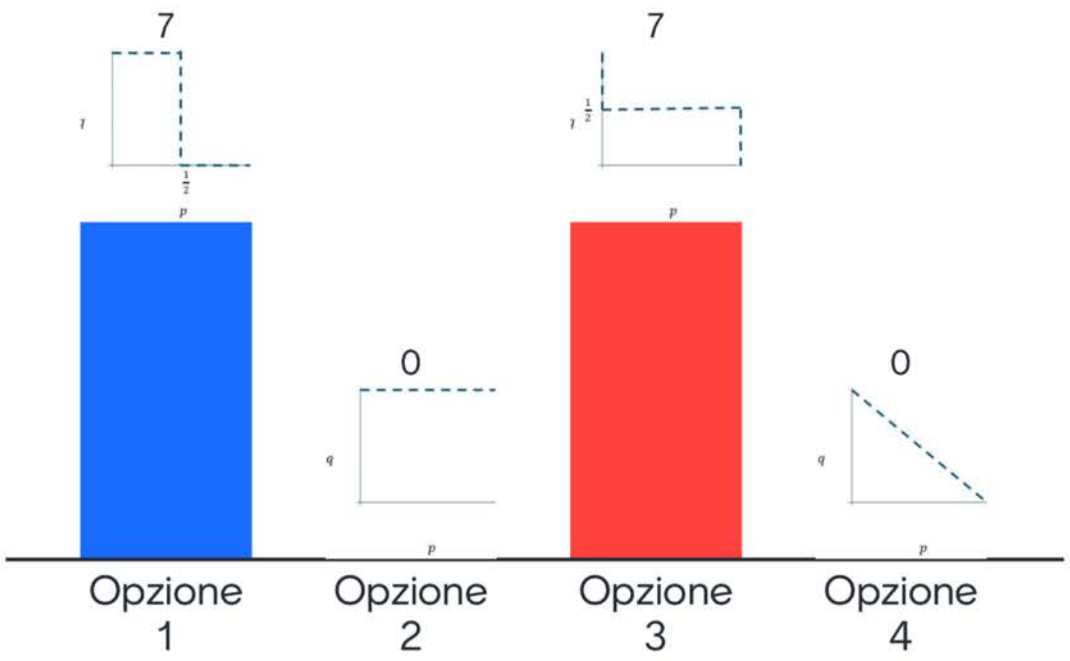

QUIZ!

Come è fatta la miglior risposta del secondo giocatore?



14

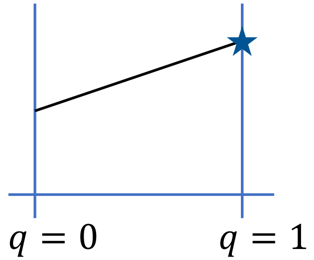
Come è fatta la miglior risposta del secondo giocatore?



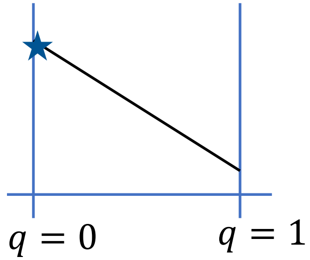
14

Come si trovano gli equilibri in miste?

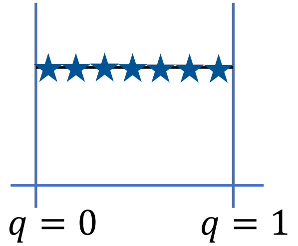
Tutto dipende dal coefficiente angolare $(1-2p)$:



- Se $1-2p>0$ cioè $p<\frac{1}{2}$, allora siamo nel primo caso e la miglior risposta del primo giocatore sarà $q=1$;



- Se $1-2p<0$, cioè $p>\frac{1}{2}$, allora siamo nel secondo caso e la miglior risposta del primo giocatore sarà $q=0$;

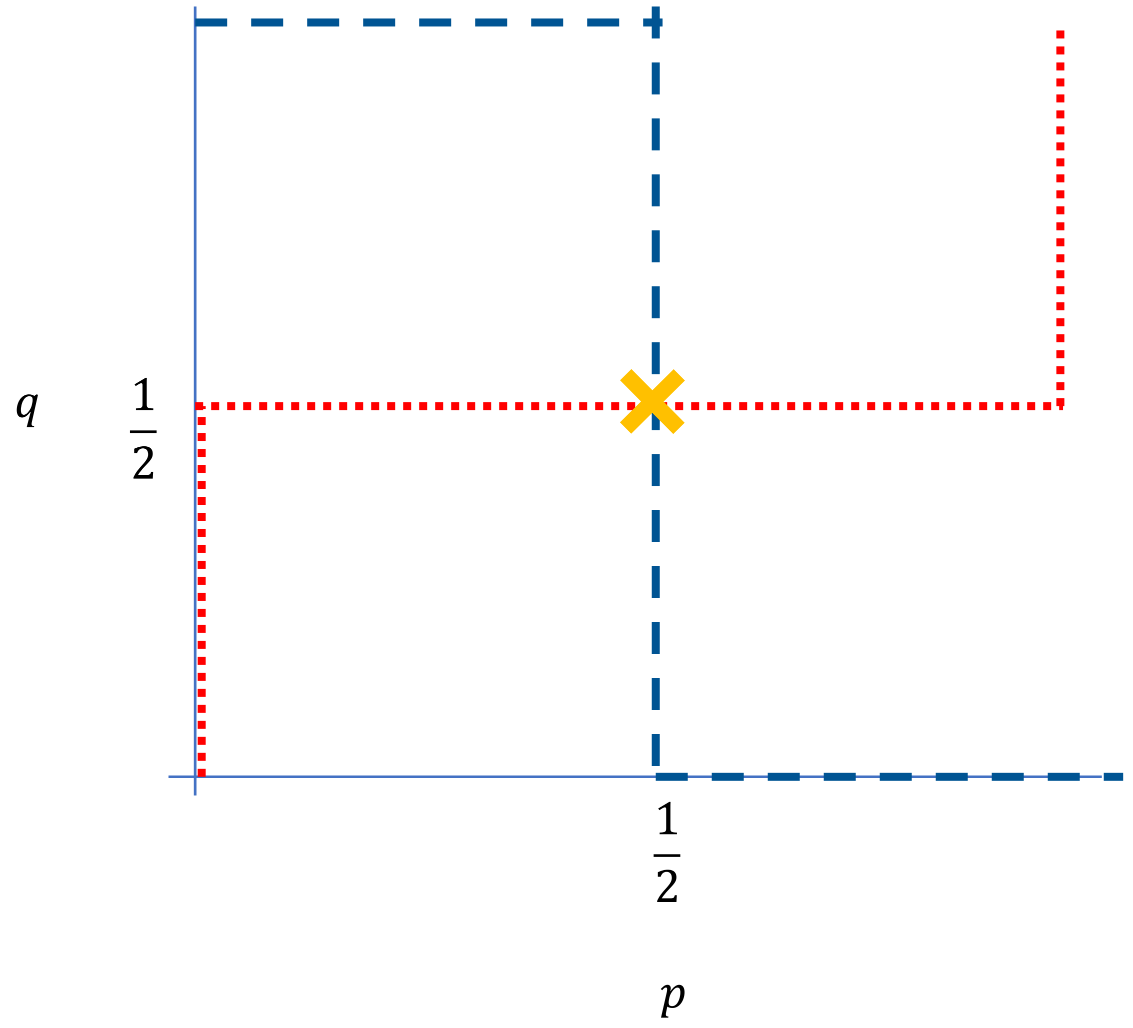


- Se $1-2p=0$, cioè $p=\frac{1}{2}$, allora siamo nel secondo caso e ogni $q\in[0,1]$ sarà una miglior risposta

Come si trovano gli equilibri in miste?

Riassumendo:

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ è un equilibrio di Nash in strategie miste



Teorema di Nash

Siano X e Y sottoinsiemi chiusi, convessi e limitati di $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ (per esempio l'insieme delle strategie miste di un gioco finito soddisfa a queste proprietà) e f e g due funzioni continue. Supponiamo inoltre che valgano le seguenti proprietà:

- $x \rightarrow f(x, y)$ è quasi concava per ogni y fissato
- $y \rightarrow g(x,y)$ è quasi concava per ogni x fissato

Allora esiste almeno un equilibrio di Nash.

Per la prossima volta

Analizzare il gioco della battaglia dei sessi in strategie miste.

		
	(2, 1)	(0, 0)
	(0, 0)	(1, 2)

Equilibri correlati

- Estensioni degli equilibri di Nash
- Interessanti non dal punto di vista matematico ma per altri motivi…

	sinistra	destra
alto	(7, 2)	(0, 0)
basso	(6, 6)	(2, 7)

Equilibri correlati

- Estensioni degli equilibri di Nash
- Interessanti non dal punto di vista matematico ma per altri motivi…

	sinistra	destra
alto	**(7, 2)**	(0, 0)
basso	(6, 6)	**(2, 7)**

+ l'equilibrio in miste: $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ per il primo e $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ per il secondo, con utilità $\frac{14}{3}$ per entrambi.

Equilibri correlati

- L'equilibrio in miste corrisponde a queste probabilità:

$2/9$	$1/9$
$4/9$	$2/9$

- Ma se la cambiassimo?

Equilibri correlati

- Che ne pensate di

0	0
1	0

- È fattibile?

Equilibri correlati

- Che ne pensate di

$1/3$	0
$1/3$	$1/3$

- È fattibile?

Equilibri correlati

- Che ne pensate di

$1/3$	0
$1/3$	$1/3$

- È fattibile? L'utilità sarebbe $\frac{15}{3}$ per entrambi, meglio che nell'equilibrio in miste!

Equilibri correlati

- Immaginiamo che una terza persona lanci il dado e suggerisca privatamente a ciascun giocatore che cosa fare. In questo caso la cosa funziona!!!
- Supponiamo che il dado selezioni l'esito (6,6). Al primo giocatore viene detto di giocare la seconda riga. Se accetta la sua utilità sarà: $\frac{1}{2} * 6 + \frac{1}{2} * 2 = 4$.
- Se devia e sceglie di giocare la prima riga sarà: $\frac{1}{2} * 7 + \frac{1}{2} * 0 = \frac{7}{2}$. Quindi non devia.
- Si può verificare che questo ragionamento vale anche per il secondo giocatore e per tutti gli esiti.

	sinistra	destra
alto	(7, 2)	(0, 0)
basso	(6, 6)	(2, 7)

$1/3$	0
$1/3$	$1/3$

Equilibri correlati

- Gli equilibri correlati sono distribuzioni di probabilità sugli esiti, tali che, qualunque sia l'esito selezionato da una procedura casuale che rispetta le probabilità proposte, una volta informati i giocatori di quello che dovrebbero fare, essi non hanno interesse a deviare.

	sinistra	destra
alto	(7, 2)	(0, 0)
basso	(6, 6)	(2, 7)

1/3	0
1/3	1/3

Equilibri correlati

- Non li posso ottenere come strategie miste:

pq	$p(1-q)$
$(1-p)q$	$(1-p)(1-q)$

$1/3$	0
$1/3$	$1/3$

$$\begin{cases} \underline{p \cdot q = \frac{1}{3}} \\ p \cdot (1-q) = 0 \\ (1-p) \cdot q = \frac{1}{3} \\ \underline{(1-p) \cdot (1-q) = \frac{1}{3}} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ $p = 0$ oppure $q = 1$

- se $p=0$ $\quad \underline{p \cdot q = \frac{1}{3}}$ impossibile
- se $q=1$ $\quad \underline{(1-p)(1-q) = \frac{1}{3}}$ impossibile