Teoria dei Giochi

Anna Torre

Almo Collegio Borromeo 19 marzo 2015

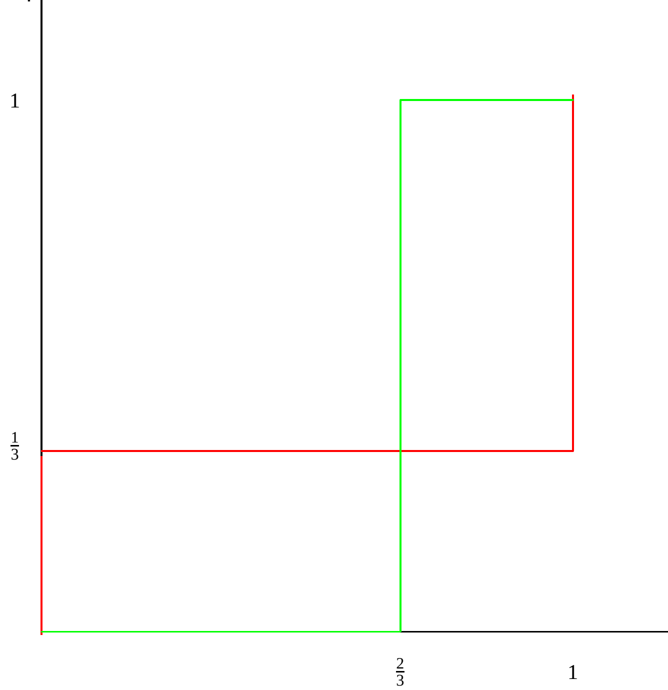
email: anna.torre@unipv.it

sito web del corso:www-dimat.unipv.it/atorre/borromeo2015.html

LA BATTAGLIA DEI SESSI

I \ II	L	R
T	(2, 1)	(0, 0)
B	(0, 0)	(1, 2)

Ha due equilibri in strategie pure :(T, L), (B, R) e uno in strategie miste: $p = \frac{2}{3}$, $q = \frac{1}{3}$ con valore atteso per entrambi i giocatori $\frac{2}{3} < 1$


1
$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}$
1

Strategie correlate

Consideriamo un gioco in forma strategica: (X, Y, f, g),

- X è l'insieme (finito) delle strategie del primo giocatore
- Y è l'insieme (finito) delle strategie del secondo
- f è la funzione di utilità di I
- g è la funzione di utilità di II.

Come si riflette sul modello un accordo tra i due giocatori?

I giocatori possono decidere di giocare una coppia di strategie $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$,

ma possono anche accordarsi su una strategia correlata μ su $X \times Y$.

Strategie correlate

- $\Delta(X)$ insieme di tutte le distribuzioni di probabilità su X
- $\Delta(Y)$ insieme di tutte le distribuzioni di probabilità su Y .
- e $\Delta(X \times Y)$ insieme di tutte le distribuzioni di probabilità su $X \times Y$

Una **strategia correlata** è una distribuzione di probabilità su $X \times Y$.

Strategie correlate

I \ II		
	$\frac{1}{2}$	0
	0	$\frac{1}{2}$

è una distribuzione di probabilità su $X \times Y$ che non si può ottenere come prodotto di due distribuzioni di probabilità indipendenti su X e Y.

1. $p(1-q) = 0, \ q(1-p) = 0$ implica o $p = q = 0$ oppure $p = q = 1$
2. $pq = \frac{1}{2}$ è in contrasto con 1

Strategie correlate

- Se ogni giocatore sceglie una distribuzione di probabilità sul suo spazio di strategie e si considera la distribuzione di probabilità su $X \times Y$ che si ottiene dall'assunto che le due distribuzioni su X e Y siano indipendenti, si gioca in maniera non cooperativa.
- Se i giocatori possono accordarsi su una distribuzione di probabilità qualunque su $X \times Y$ significa dire che **sono ammessi accordi vincolanti.**

Strategie correlate

I \ II		
	$p_{1,1}$	$p_{1,2}$
	$p_{2,1}$	$p_{2,2}$

con $0 \le p_i \le 1$ per ogni i $1 \le i \le 4$ e $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$
è una strategia correlata.

I \ II	q	$1-q$
p	pq	$p(1-q)$
$1-p$	$q(1-p)$	$(1-p)(1-q)$

è una strategia mista. Le strategie miste sono strategie correlate ma non viceversa.

Strategie correlate

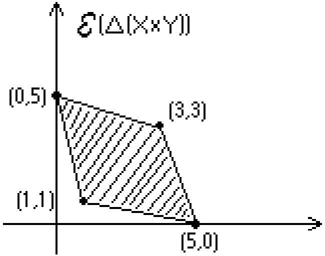
- $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$
- $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$,
- una strategia correlata p è una matrice p_{ij}, dove p_{ij} è la probabilità assegnata da p alla coppia di strategie pure (x_i, y_j).
- L'utilità attesa del primo giocatore I, se viene "giocata" la strategia p, è:
$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} u_I(x_i, y_j)$$
- Questo è il valore atteso di u_I rispetto alla distribuzione di probabilità p su $X \times Y$. Possiamo indicarlo con: $E_p(u_I)$.
- Indichiamo il valore atteso di u_{II} con $E_p(u_{II})$.

Data la strategia p, $(E_p(u_I), E_p(u_{II}))$ è una coppia di numeri reali. Abbiamo quindi una funzione :
$\mathcal{E} : \Delta(X \times Y) \longrightarrow \mathbf{R}^2$. Ci interessa l'**immagine** di $\mathcal{E}$, cioè $\mathcal{E}(X \times Y)$.Essa è l'involucro convesso dell'insieme

$$\{(u_I(x_i, y_j), u_{II}(x_i, y_j) : i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n\}$$

Dilemma del prigioniero

I \ II	*S*	*T*
S	(3, 3)	(0, 5)
T	(5, 0)	(1, 1)



EQUILIBRI CORRELATI

Consideriamo la battaglia dei sessi:

I \ II	L	R
T	(2, 1)	(0, 0)
B	(0, 0)	(1, 2)

Se i due giocatori hanno la possibilità di comunicare tra loro e di correlare le loro strategie sembra ragionevole pensare che potrebbero decidere che si lancia una moneta e che se viene testa giocano entrambi S, se viene croce giocano entrambi T.
Questo accordo (di lanciare la moneta) permette a entrambi di avere una utilità attesa di $\frac{3}{2}$ e risulta essere stabile in quanto nessuno dei due ha interesse a deviare perché l'accordo prevede comunque di giocare un equilibrio di Nash.

Contrattazione

A questo punto invece ci mettiamo dal punto di vista cooperativo, cioè supponiamo di poter sottoscrivere accordi vincolanti (contratti) e ci chiediamo quale contratto verrà effettivamente sottoscritto. Ci mettiamo da un punto di vista“normativo”. $\mathcal{E}(X \times Y)$ è un sottoinsieme chiuso, convesso e limitato di R^2.
Possiamo pensare che i giocatori si accordino per giocare una strategia correlata μ t.c. $\mathcal{E}(\mu)$ sia efficiente.
Ma quale μ ?

L'insieme $\mathcal{E}(X \times Y)$ rappresenta tutte le coppie dei valori dei payoff che i due giocatori possono ottenere sottoscrivendo accordi vincolanti.
Non è ragionevole immaginare che **tutti** gli accordi possano venire prevedibilmente sottoscritti.
Ad esempio, nel dilemma del prigioniero un contratto che preveda di giocare la coppia di strategie (T, R) (con probabilità 1, s'intende) sarà difficilmente sottoscritto dal giocatore I, visto che lui, giocando B, è in grado di **garantirsi comunque** un payoff almeno pari ad 1.

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

Diremo che un problema di contrattazione è una coppia (F, d), dove:

- $F \subseteq R^2$, chiuso e convesso
- $d \in R^2$

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

F rappresenta l'insieme di tutte le coppie di valori di utilità ai quali i due giocatori possono pervenire,
$d = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ rappresenta il "punto di disaccordo",cioè il valore che i giocatori possono ottenere in caso di mancato raggiungimento di un accordo.
Un problema di contrattazione è una coppia (F, d).
In particolare, nel nostro esempio $F = \mathcal{E}(\Delta(X \times Y))$ e $d = (v_I, v_{II})$.

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

1. Quello sopra delineato **non è l'unico modo possibile** per trasformare un gioco strategico in un problema di contrattazione. In particolare, si possono impiegare altri approcci per identificare il punto di disaccordo.
2. l'approccio seguito può essere criticato per essere troppo rigidamente "welfarista". Infatti stiamo assumendo che l'insieme F (con la sua interpretazione canonica, quale insieme delle coppie di valori di utilità sui quali i giocatori contrattano) rappresenti, assieme a d, **tutte le informazioni rilevanti**.

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

Formalizziamo il problema di contrattazione.
Indichiamo con $\mathcal{B}$ l'insieme dei problemi di contrattazione dei quali ci occupiamo. Gli elementi di $\mathcal{B}$ sono coppie (F, d), dove:

1. F è un sottoinsieme di R^2, chiuso e convesso
2. $d = (\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in R^2$
3. $F \cap \{(u_1, u_2) \in R^2 : u_1 \geq \bar{u}_1$ e $u_2 \geq \bar{u}_2\}$ è non vuoto e limitato

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

Se in F c'è un elemento (u_1, u_2) con $u_1 > \bar{u}_1$ e $u_2 > \bar{u}_2$, allora il problema di contrattazione (F, d) viene detto *essenziale*.

Per *soluzione* del problema di contrattazione (relativamente alla classe $\mathcal{B}$ sopra individuata) intendiamo una applicazione Φ definita su $\mathcal{B}$ a valori in R^2.

L'idea è che ad ogni (F, d) siamo in grado di associare (univocamente!) una coppia $\Phi(F, d) = (\Phi_1(F, d), \Phi_2(F, d))$ che rappresenti, in termini interpretativi, i valori di utilità assegnati rispettivamente ai due giocatori.

Come definire questa Φ?

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

L'approccio seguito da Nash non è stato quello di definire "a priori" Φ, ma di imporre condizioni "ragionevoli" che ogni soluzione Φ dovrebbe soddisfare.
E poi di provare che c'è una ed una sola Φ che soddisfa tali condizioni.

Ottimo di Pareto forte e debole)

Sia F un sottoinsieme chiuso di $\mathbf{R}^2$

- Si dice che $\bar{x}, \bar{y}$ è un ottimo paretiano forte per F se non esiste nessun $(x, y) \in F$ con $x \geq \bar{x}$ e $y \geq \bar{y}$ con almeno una delle due disuguaglianze che sia stretta;
- Si dice che $\bar{x}, \bar{y}$ è un ottimo paretiano debole per F se non esiste nessun $(x, y) \in F$ con $x > \bar{x}$ e $y > \bar{y}$.

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

Queste condizioni sono le seguenti:

- **Efficienza forte**: $\Phi(F, d) \in F$ ed è un ottimo paretiano forte per F
- **Razionalità individuale**: $\Phi_1(F, d) \geq \bar{u}_1$ e $\Phi_2(F, d) \geq \bar{u}_2$
- **Co-varianza rispetto a cambiamenti di scala**: Per ogni $\lambda_1, \lambda_2, \gamma_1, \gamma_2 \in R$ t.c. $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, siano:

  $F' = \{(\lambda_1 u_1 + \gamma_1, \lambda_2 u_2 + \gamma_2) : (u_1, u_2) \in F\}$ e $d' = (\lambda_1 \bar{u}_1 + \gamma_1, \lambda_2 \bar{u}_2 + \gamma_2)$

  Allora

  $$\Phi(F', d') = (\lambda_1 \Phi_1(F, d) + \gamma_1, \lambda_2 \Phi_2(F, d) + \gamma_2)$$

- **Indipendenza dalle alternative irrilevanti**: Sia dato (F, d) e sia $G \subseteq F$, G chiuso e convesso, t.c. $\Phi(F, d) \in G$. Allora $\Phi(F, d) = \Phi(G, d)$
- **Simmetria**: Se $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$ e se $(u_1, u_2) \in F \Leftrightarrow (u_2, u_1) \in F$, allora $\Phi_1(F, d) = \Phi_2(F, d)$

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

Si può allora enunciare il seguente: Teorema (Nash 1951)
C'è una ed una sola soluzione Φ, definita su $\mathcal{B}$, che soddisfa le condizioni 1), ..., 5). Inoltre, se (F, d) è essenziale, si ha che:

$$\Phi(F, d) = \text{argmax } (u_1 - \bar{u}_1)(u_2 - \bar{u}_2) \text{ con } (u_1, u_2) \in F, u_1 \geq \bar{u}_1, u_2 \geq \bar{u}_2$$

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

Analisi degli assiomi Il teorema di Nash è in grado di mettere d'accordo chiunque si trovi in una situazione come quella di sopra ed accetti le sue condizioni per un'equa spartizione.

Il primo assioma vuol mettere in luce un criterio di efficienza: non ha senso accontentarsi di un risultato, se entrambi i giocatori possono fare meglio. Dunque, anche ammettendo che i giocatori possano distruggere utilità, questo non può accadere all equilibrio.

Il terzo assioma è detto di invarianza rispetto a trasformazioni di utilità. Dice che se cambiamo unità di misura all'utilità del giocatore (i fattori h e k) e aggiungiamo certe quantità iniziali, il risultato cambia tenendo conto esattamente dei fattori precedenti.

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

Il quarto è chiamato indipendenza dalle alternative irrilevanti: se aggiungere a C, che è l'insieme delle utilità che i giocatori si possono garantire nella contrattazione, altri elementi, che portano a costruire un insieme più grande C', porta come risultato a una situazione che già era in C, allora quest'ultima è già la soluzione per il gioco C. (Notare che il punto di disaccordo è lo stesso in entrambi i giochi). In altre parole, quello che abbiamo aggiunto a C non sono che alternative irrilevanti, appunto.

Il quinto, detto assioma di simmetria, è molto chiaro: significa che in un gioco simmetrico il risultato deve essere simmetrico. Se i giocatori sono indistinguibili dal punto di vista delle loro utilità e dal punto di partenza, il risultato deve essere lo stesso per ambedue.

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

Il modello di contrattazione di Nash è certamente molto interessante. Non è certo esente da critiche, però. Vediamo ora alcuni problemi che sono emersi rappresentando una critica all'approccio assiomatico di Nash:

- Come si sceglie il punto d? Non è facile fare una scelta se il gioco dato non è cooperativo. In realtà ci sono vari approcci: il max-min, un equilibrio di Nash,...
- analogamente, il "feasibility set" F è individuato con certezza? ogni F con le caratteristiche date (convesso, etc.) è un "feasibility set" per un qualche problema di contrattazione? O ve ne sono alcuni che non si posssono ottenere in questo modo?

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

- altre informazioni, oltre a quelle previste (e cioè (F, d)), rappresentate in termini di valori di utilità, non hanno alcun rilievo in un problema di contrattazione? Non saremmo disposti a modificare le nostre opinioni se avessimo informazioni supplementari?
- per quale motivo Φ deve essere un "singleton"? Ad esempio, un gioco strategico non ha in genere un unico equilibrio di Nash
- un'altra obiezione è più generale ed è una obiezione di fondo all'approccio assiomatico. Perchè mai determinare una soluzione su una classe di giochi quando si ha a che fare con un gioco concreto? Dietro a questa impostazione c'è l'idea di una validità normativa. Ma anche da questo punto di vista la classe dei giochi che posso aspettarmi di giocare è assimilabile all'insieme dei problemi di contrattazione su cui si ha l'assiomatizzazuione di Nash?

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

- In alcuni casi la soluzione dettata dal modello non è equa. Per esempio, se la spartizione della somma avviene tra due persone (I e II) la cui funzione di utilità assume i seguenti valori:

Moneta di I	Moneta di II	Utilità di I	Utilità di II	Prodotto
0	100	0.00	1.00	0.00
25	75	0.25	0.98	0.245
50	50	0.50	0.90	0.450
75	25	0.75	0.73	0.548
100	0	1.00	0.00	0.00

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

la soluzione di Nash offre 75 a I e 25 a II. Cio è eticamente ingiusto.
In realtà la funzione di utilità dichiarata da I è la funzione dichiarabile da un “ricco”, mentre l’utilità dichiarata da II è più probabile per un “povero”.
Certamente sul piano etico siamo portati a pensare che sarebbe meglio dare di più al povero.
Ma l’ingiustizia non sembra essere nel modello di contrattazione, bensì nelle funzioni di utilità che vengono dichiarate dai due.

Contrattazione (Modello di Nash, 1951)

Le critiche più significative sono state fatte all'assioma dell'indipendenza dalle alternative irrilevanti. In effetti può non sembrare sensato che di fronte a nuove alternative la soluzione non debba mai cambiare. Nuove alternative possono cambiare la forza contrattuale di chi da queste viene privilegiato.

Teorema di Arrow 1951)

Teorema di Arrow (1951)
Dato un insieme di alternative Γ e un insieme N di n individui e l'insieme $\mathcal{P}$ dei preordini totali su Γ definiamo **regola di determinazione delle scelte collettive**, una funzione

$$P : \underbrace{\mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \ldots \times \mathcal{P}}_{n \text{ volte}} \to \mathcal{P} \tag{1}$$

Teorema di Arrow 1951)

Chiameremo **sistema di preferenze collettivo** $\succeq_N$ il valore che la funzione P assume in corrispondenza della n-upla di prefernze $(\succeq_i)_{i\in N}$ su Γ.
Un elemento $(\succeq_i)_{i\in N}$ di $\mathcal{P}^n$ verrà detto profilo di preferenze.

Condizioni imposte:

- **Unanimità** Diciamo che la regola P rispetta la **condizione dell'unanimità** se $\forall x, y \in \Gamma,\ \forall\ (\succeq_h)_{h \in N} \in \mathcal{P}^n \quad \Big([\forall h \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad (x \succeq_h y)] \Rightarrow (x \succeq_N y) \Big)$ dove $\succeq_N$ è l'ordinamento collettivo ottenuto da P a partire da $(\succeq_h)_{h \in N}$.
- **Indipendenza dalle Alternative Irrilevanti** Diciamo che la regola per la scelta collettiva P è **indipendente dalle alternative irrilevanti** se $\forall x, y \in \Gamma \quad \Big([\forall h \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad (x \succeq_h y) \Leftrightarrow (x \sqsupseteq_h y)] \Rightarrow [(x \succeq_N y) \Leftrightarrow (x \sqsupseteq_N y)] \Big) \qquad \forall\ (\succeq_h)_{h \in N}, (\sqsupseteq_h)_{h \in N} \in \mathcal{P}^n$ dove $\succeq_N$ e $\sqsupseteq_N$ sono gli ordinamenti collettivi ottenuti da P a partire rispettivamente da $(\succeq_h)_{h \in N}$ e $(\sqsupseteq_h)_{h \in N}$.

Teorema di Arrow 1951)

- **Dittatorialità** Diciamo che la regola per la scelta collettiva P rispetta la **condizione di dittatorialità** se
$\exists \tilde{h} \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tale che
$P(\succeq_1, \ldots, \succeq_{\tilde{h}}, \ldots, \succeq_n) = \succeq_{\tilde{h}} \quad \forall \quad (\succeq_h)_{h \in N} \in \mathcal{P}^n$
cioè $\succeq_{\tilde{h}}$, che rappresenta il sistema di preferenze del giocatore $\tilde{h}$, coincide con l'ordinamento collettivo $\succeq_N$ ottenuto da P a partire da $(\succeq_h)_{h \in N}$.

Teorema di Arrow 1951

Dato un insieme N di n agenti e un insieme di alternative Γ con almeno tre elementi, una regola di determinazione della scelta collettiva P che rispetti le condizioni 1 e 2 è dittatoriale.

Teorema di Arrow 1951

Regola della maggioranza semplice:

Condorcet (1785)

Si verifica facilmente che $\succeq_N$ non è transitiva.

$$\left.\begin{array}{l} x \succ_a y \succ_a z \\ y \succ_b z \succ_b x \\ z \succ_c x \succ_c y \end{array}\right\}$$

Si deduce che:

$$x \succ_N y \succ_N z \succ_N x$$

Metodo del conteggio di Borda (1791)

Dato un insieme di alternative Γ e un consesso decisionale costituito da un insieme N di n individui, il metodo di conteggio di Borda definisce che per ogni agente in N vengano elencati nell'ordine di preferenza gli elementi di Γ e vengano attribuiti il punteggio di 1 all'ultimo (quello che non è strettamente preferito ad alcuna alternativa in Γ), 2 al penultimo e così via.
La somma dei punteggi ottenuti dai vari elementi in Γ fornisce la classificazione collettiva tra le alternative in Γ.

Metodo del conteggio di Borda

$N = \{1, 2, 3\}$ $\Gamma = \{a, b, c, d, e, \}$

$a \succ_1 b \succ_1 c \succ_1 d \succ_1 e$

$a \succ_2 b \succ_2 c \succ_2 d \succ_2 e$

$c \succ_3 d \succ_3 e \succ_3 a \succ_3 b$

	a	b	c	d	e
1	5	4	3	2	1
2	5	4	3	2	1
3	2	1	5	4	3
totale	12	9	11	8	5

L'alternativa scelta è la a.

Metodo del conteggio di Borda (1791)

Supponiamo ora che venga eliminata l'alternativa b(o messa per ultima da tutti i decisori). In tal caso la tabella diventa:

	a	c	d	e
1	4	3	2	1
2	4	3	2	1
3	1	4	3	2
totale	9	10	7	4

In questo caso viene scelta l'alternativa c (si osservi che a era sempre preferito a b).

GIOCHI RIPETUTI: COLLUSIONE

- Se un gioco viene giocato un'unica volta non c'è alcun motivo per cooperare se non c'è un contratto scritto.
- Se il gioco viene ripetuto "non cooperare" a un certo stadio del gioco potrebbe significare che negli stadi successivi l'altro giocatore potrebbe non cooperare più.

L'incentivo alla cooperazione è più forte. Si tratta di vedere

come si costruisce una norma sociale.

Orizzonte temporale finito o infinito

- I comportamenti saranno diversi se i giocatori hanno un orizzonte temporale breve o un orizzonte temporale lungo (infinito).
- La differenza tra orizzonte finito e infinito è più una differenza di percezione della durata del gioco da parte dei giocatori che non una situazione effettivamente reale.
- Un modello di orizzonte finito è piu ragionevole quando i giocatori percepiscono chiaramente il periodo finale, mentre quello con orizzonte infinito quando i giocatori dopo ogni periodo pensano che il gioco continuerà per un periodo ancora.
- Altrimenti, visto che la vita è finita, potremmo modellizzare solo orizzonte finito.

Orizzonte temporale finito

- se il gioco possiede un solo equilibrio di Nash, il gioco ripetuto con orizzonte temporale finito ha un unico equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi che consiste nel giocare ad ogni passo la strategia di equilibrio
- Se il gioco ha più di un equilibrio di Nash, allora il gioco ripetuto può avere degli equilibri di Nash perfetti nei sottogiochi in cui in qualche passo i giocatori non giocano una strategia di equilibrio del gioco componente.

Orizzonte temporale finito

Si consideri la seguente modifica del dilemma del prigioniero:

I \ II	S	C	D
A	$(5, 5)$	$(1, 6)$	$(0, 0)$
M	$(6, 1)$	$(2, 2)$	$(0, 0)$
B	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$

Gli equilibri di Nash sono (M, M) e (B, D). In realtà le vincite migliori per entrambi i giocatori sono quelle relative alle strategie (A, S) dove entrambi ottengono 5.
Supponiamo ora di ripetere il gioco due volte.
Notiamo per prima cosa che le strategie di ciascun equilibrio giocate entrambe le volte costituiscono un equilibrio di Nash e quindi nel gioco ripetuto si ritrovano gli equilibri di Nash del gioco di partenza.
Tali equilibri sono anche perfetti nei sottogiochi

Consideriamo il seguente profilo di strategie:

- Primo giocatore: Scelgo A nel primo periodo, nel secondo scelgo M se nel primo periodo le azioni osservate sono (A, S), altrimenti scelgo B.
- Analoga strategia per il secondo giocatore.

In questo caso si ottiene ancora un equilibrio perfetto nei sottogiochi. Per verificarlo occorre considerare 9 sottogiochi nel secondo periodo , ciascuno corrispondente di una delle 9 coppie di strategie possibili nel primo gioco.

Orizzonte temporale infinito

Se un gioco viene ripetuto infinite volte si possono otterere risultati differenti; in particolare acquistano rilevanza i concetti di minaccia e di punizione, come e più che nel caso di orizzonte finito con più equilibri di Nash. Ad esempio se il dilemma del prigioniero è ripetuto infinite volte non si può applicare il ragionamento basato sull'induzione a ritroso, per cui la minaccia
"se non cooperi io non coopererò mai più "
acquista un peso diverso.

Vediamo un esempio sempre riferito al dilemma del prigioniero. Supponiamo che entrambi i giocatori adottino la seguente strategia:

- **T** "Nel primo periodo scelgo T e successivamente scelgo T se e solo se in tutti i periodi precedenti ho osservato (T,L), in caso contrario da quel momento in poi scelgo B."
- **T** "Nel primo periodo scelgo L e successivamente scelgo L se e solo se in tutti i periodi precedenti ho osservato (T,L), in caso contrario da quel momento in poi scelgo R."

Calcoliamo le vincite di ciascun giocatore.
Se entrambi scelgono la strategia **T** sopra scritta ottengono :
$u_I(T) = u_{II}(T) = 5 + 5\delta + 5\delta^2 + 5\delta^3 + ... = 5\frac{1}{1-\delta}$
Se I adotta un'altra strategia D_i che al passo i-esimo gli fa scegliere C per la prima volta, e II adotta **T**, ottiene
$u_I(D_i) = 5 + 5\delta + 5\delta^2 + ... + 5\delta^{i-1} + 6\delta^i + 2\delta^{i+1}..... =$
$5 + 5\delta + 5\delta^2 + ...5\delta^{i-1} + 6\delta^i + 2\delta^{i+1}\frac{1}{1-\delta}$

Si ha
$u_I(D_i) \leq u_I(T) \Leftrightarrow \delta \geq \frac{1}{6}$
infatti: $u_I(D_i) \leq u_I(T) \Leftrightarrow 6\delta^i + 2\delta^{i+1}\frac{1}{1-\delta} \leq 5\delta^i + 5\delta^{i+1} \Leftrightarrow \delta \geq \frac{1}{6}$
Analogo discorso si può fare per II.
Quindi, se il tasso di sconto è maggiore di $\frac{1}{6}$, la coppia di strategie (**T**,**T**) è un equilibrio di Nash e si potrebbe vedere che è anche perfetto nei sottogiochi..

Analogo risultato si può ottenere se il tasso di sconto viene invece interpretato come la probabilità che un gioco di durata aleatoria prosegua da un dato stadio al successivo.

BIBLIOGRAFIA

Arrow KJ (1951) Social choice and individual values. Wiley, New York

Nash, John F. Jr. [1950]: Equilibrium Points in n-Person Games, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 36, 48-49.

Nash, John F. Jr. [1950]: The Bargaining Problem, Econometrica, 18, 155-162.

Nash, John F. Jr. [1951]: Non-Cooperative Games, Ann. of Math., 54, 286-295.

Nash, John F. Jr. [1953]: Two-Person Cooperative Games, Econometrica, 21, 128-140