



Applicazione dei modelli deterministici e stocastici a problematiche legate all'ambiente. Il caso della ripartizione dei costi sostenuti per la depurazione delle acque.

Stefano Moretti

Dipartimento di Matematica, Università' di Genova

Email: [moretti@dima.unige.it](mailto:moretti@dima.unige.it)

Phone:010-3536838

1. Applicazione dei modelli deterministici: allocazione dei costi nella gestione dei rifiuti urbani.

## Contesto applicativo

I Comuni sono molto spesso troppo piccoli per sviluppare un servizio di gestione dei rifiuti in grado di soddisfare gli standard richiesti dalla normative UE ad un costo sostenibile.



A causa delle economie di scala imposte dalla necessità di staff specializzato e di apparecchiature (bidoni e compattatori), la cooperazione **inter-municipale** è vantaggiosa.



Quindi I Comuni hanno la necessità di riorganizzare efficientemente il servizio in vista dell'allargamento dell'area inter-municipale complessiva su cui il servizio deve essere erogato.

## Non solo efficienza...

- L'efficienza non può essere l'unico criterio che deve essere considerato allo scopo di prendere decisioni sull'argomento.
- Il costo complessivo generato dalla cooperazione deve essere comunque sostenuto dai singoli Comuni.
- In altre parole, **il costo complessivo deve essere ripartito** tra i Comuni **in maniera equa** al fine **di incentivare** ogni singolo Comune a mantenere la cooperazione.

<b>INPUT</b>	
Tasso di produzione dei rifiuti	} Ogni zona e' definita sulla base di questi parametri
Densita' media del materiale di rifiuto	
Tipo di bidone per la raccolta	
Distanza tra gruppi di bidoni	
Distanza dal sito di discarica	
Distribuzione del volume per raccolta	
<b>Volume</b>	
Percentuale di riempimento	} <i>Ulteriore informazione per ciascun tipo di bidone</i>
Tasso di svuotamento	
Costo di investimento	
<b>Capacita' di compattazione</b>	
Velocita' media massima	} <i>Ulteriore informazione per ciascun tipo di mezzo compattatore</i>
Tempo medio per caricare il materiale	
Costo di investimento	
Numero di addetti necessari	

## Raccolta dei dati

E' stato inviato un questionario alle amministrazioni del servizio:

**Questionario per la collezione di dati da utilizzare nel modello di stima dei costi di raccolta RSU**

Il seguente questionario è composto da una serie di domande che prevedono risposte da inserire in apposite tabelle poste al seguito delle domande.  
 Il numero di righe di ogni tabella è stato convenuto in base ad un criterio di semplice manipolazione dei dati per l'inserimento degli stessi all'interno del software per la stima dei costi.  
 Si prega pertanto di compilarlo attenendosi ai criteri che sono riportati nell'esempio che si trova nella parte destra delle pagine.  
 Vi saremmo grati se ci faceste pervenire qualsiasi motivazione per la quale ritenete la compilazione del questionario non fattibile nel contesto in cui vi muovete.

1) Inserire il nome del consorzio per la raccolta dei rifiuti, l'indirizzo di posta elettronica di riferimento e il nome della città a cui si vuol fare riferimento nel questionario:

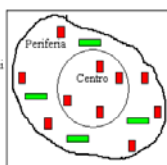
NOME: \_\_\_\_\_

CITTA': \_\_\_\_\_

E-MAIL: \_\_\_\_\_

**Esempio**

Il seguente esempio rende conto di quello che dovrebbe scrivere nel questionario a sinistra il Consorzio che si trovasse a descrivere la seguente città immaginaria:



La zona 1 è il Centro, dove i bidoni sono svuotati ogni giorno.  
 La zona 2 è la Periferia, dove i bidoni sono svuotati ogni 3 giorni.  
 ■ Questo è il bidone tipo a.  
 ■ Questo è il bidone tipo b.

1) Inserire il nome del consorzio per la raccolta dei rifiuti, l'indirizzo di posta elettronica di riferimento e il nome della città a cui si vuol fare riferimento nel questionario:

NOME: *Consorzio per la raccolta dei Rifiuti Urbani della zona*

CITTA': *Immaginaria*

E-MAIL: *raccolta@immagina.it*

Questionario da compilare da parte delle amministrazioni

Un esempio auto-esplicativo di questionario su una situazione "virtuale"

## Validazione del modello: risultati

Nella seguente tabella sono mostrati i risultati relativi ad una simulazione effettuata sulla città di Tortona (AL):

Voce di costo	Totale (€)
Costo totale annuale di ammortamento per i bidoni	61 970
Costo totale annuale di ammortamento per i mezzi compattatori	114 650
Costo totale annuale di mantenimento per i bidoni	40 280
Costo totale annuale per lo staff	640 920
Costo totale annuale di nantenimento per i mezzi compattatori	58 360
<i>Costo Totale</i>	916 180

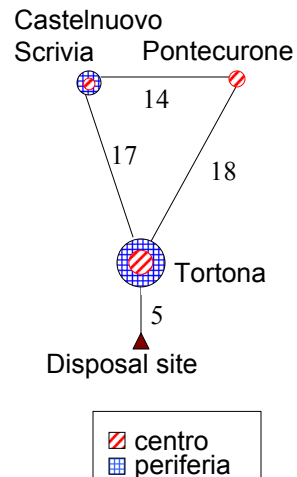
Livello di approssim. molto buono

Sovrastimato 10-15%

## Si Consideri:

Un consorzio di tre Comuni: *Tortona, Castelnuovo Scrivia e Pontecurone*

Comune	Abitanti	Rifiuti raccolti (Tons)	Superf. 10 <sup>4</sup> m <sup>2</sup>
<b>Tortona</b>	26 826	15 500	9 929
<b>Castelnuovo S.</b>	5 762	2 774	4 542
<b>Pontecurone</b>	4 008	2 218	2 981
<b>Totale</b>	36 596	20 492	17 452



## Risultati della simulazione

Gruppo di Comuni	Costi Totali (€)
TORTONA	916 180
CASTELNUOVO S.	463 260
PONTECURONE	455 510
TORTONA - CASTELNUOVO S.	1 112 960
TORTONA - PONTECURONE	1 030 330
CASTELNUOVO S. - PONTECURONE	476 690
TORTONA – CASTELNUOVO S. - PONTEC.	1 236 910

Pavia, 28 Aprile 2004

Almo Collegio Borromeo

9

## Il gioco dei costi inter-municipale

Si consideri il gioco  $\langle M, \hat{c} \rangle$ :

- Dove  $M = \{Tortona, Castelnuovo Scivria, Pontecurone\}$  and
- $\hat{c}(S)$ ,  $S \subseteq M$ , stimato attraverso le simulazione effettuate con il modello.

Gruppo di Comuni	Costo Totale (€)
TORTONA	916 180
CASTELNUOVO S.	463 260
PONTECURONE	455 510
TORTONA - CASTELNUOVO S.	1 112 960
TORTONA - PONTECURONE	1 030 330
CASTELNUOVO S. - PONTECURONE	476 690
TORTONA – CASTELNUOVO S. - PONTEC.	1 236 910

Esempio:

$S = \{Tortona, Pontecurone\} \rightarrow \hat{c}(S) = 1\,030\,330 \text{ €}$

## Regole di allocazione dei costi piu' utilizzate nella pratica

Su un campione di 13 Consorzi di Comuni

Allocazione su <i>Comune</i>	Abitanti	Rifiuti raccolti	Superficie
<i>Tortona</i>	906 700	935 590	703 720
<i>Castelnuovo Scrivia</i>	194 750	167 440	321 910
<i>Pontecurone</i>	135 470	133 880	211 280
<i>Totale</i>	1 236 910	1 236 910	1 236 910

### Abitanti

$$\hat{c}\{Tortona, Pontecurone\} = 1\,030\,330 < 135\,470 + 906\,700 = 1\,042\,170$$

### Rifiuti raccolti

$$\hat{c}\{Tortona\} = 916\,180 < 935\,590$$

### Area

$$\hat{c}\{Castelnuovo S., Pontecurone\} = 476\,690 < 321\,910 + 211\,280 = 533\,190$$

Le regole di allocazione piu' utilizzate nella pratica non stanno nel nucleo del gioco inter-municipale considerato  $Core(M, \hat{c})$ .

## Shapley value

Nel gioco inter-municipale considerato, il valore Shapley e' quello riportato nella seguente tabella:

Comune	Shapley value
TORTONA	762 890
CASTELNUOVO	259 610
PONTECURONE	214 420
Totale	1 236 910

Si puo' verificare che tale valore sta nel nucleo  $Core(M, \hat{c})$  del gioco inter-municipale considerato.

## 2. Applicazione dei modelli stocastici: allocazione dei costi nella gestione delle acque reflue.

### Contesto applicativo

L'obiettivo e' quello di offrire, in un contesto il piu' semplificato possibile, alcuni esempi di problemi che compaiono ogni qualvolta si cerchi di tenere in considerazione gli aspetti stocastici del problema che si vuole modellizzare.

Utilizzeremo un esempio di "impianto di trattamento delle acque" per illustrare l'approccio, sebbene gli stessi principi si mantengano anche per altri casi legati all'utilizzo delle acque ed ai relativi costi (immagazzinamento ecc.)

La TdG e' stata gia' impiegata nel passato per affrontare diversi problemi legati alla gestione delle acque...

## Novita': 1) aspetti stocastici

Se si tengono in considerazione le variazioni climatiche che hanno forti ripercussioni sul ciclo dell'acqua, il mondo deve aspettarsi di dover affrontare eventi esempre piu' estremi e stocastici in relazione all'utilizzo delle acque.



Diventa quindi sempre piu' acuta l'esigenza di introdurre tali effetti stocastici all'interno dei modelli.

## 2)attitudine al rischio

Inoltre gli utenti dell'acqua possono avere differenti attitudini al rischio, per esmpio dipendenti dalle loro capacita' economiche, manageriali e istituzionali.

## Situazione water treatment

Si consideri la tupla  $\langle N, (\Omega, p), q, T, C_{t \in T} \rangle$

dove

$N = \{1, 2, \dots, n\}$  e' l'insieme degli utenti dell'acqua;

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$  e' l'insieme degli stati di natura;

Associati ad una distribuzione di probabilita'  $p(\omega_i)$  per ogni  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ ;

T insieme di tecnologie per la depurazione disponibili;

La funzione  $q(i, \omega)$  descrive la quantita' di acqua inquinata con cui ogni giocatore ha a che fare in ciascuno stato del mondo  $\omega \in \Omega$ ;

Data una certa tecnologia  $t \in T$ , la funzione non negativa  $C(q)$  descrive il costo di trattamento di una data quantita'  $q$  di acqua inquinata per ogni giocatore  $i \in N$  e per ogni  $\omega \in \Omega$ .

## Water games

Data una situazione  $wt \langle N, (\Omega, p), C, q \rangle$  il corrispondente  $\omega$ -water game per ogni  $\omega \in \Omega$  e' la coppia  $\langle N, c_\omega \rangle$  dove  $c_\omega$  e' tale che

$$c_\omega(S) = C(\sum_{i \in S} q(i, \omega)) \text{ per ogni } S \subseteq N$$

### Casi estremi.

Avversione al rischio "enorme": si considera soltanto il caso peggiore. Il gioco e'  $\langle N, c^* \rangle$  s.t.  
 $c^*(S) = \max_{\omega \in \Omega} c_\omega(S)$

Neutralita' al rischio: si considera la media sugli stati di natura. Il gioco e'  $\langle N, c' \rangle$  s.t.  
 $c'(S) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) c_\omega(S)$

Livelli intermedi di avversione al rischio: giochi cooperativi stocastici (Suijs et al.(1999))

Si consideri:

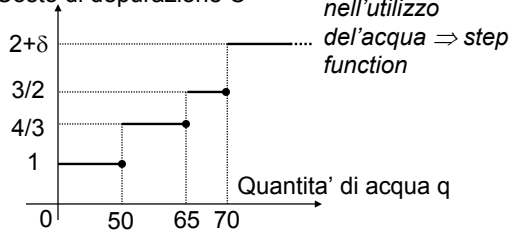
## Example

La situazione  $wt \langle N, (\Omega, p), C, q \rangle$  s.t.

- $N = \{1, 2, 3\}$
- L'insieme degli stati  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$
- $p(\omega_1) = 1/3$  e  $p(\omega_2) = 2/3$
- Si assuma  $C$  e  $q$  tali che

Il corrispondente  $\omega$ -water game  $\langle N, c_\omega \rangle$ ,  $\omega \in \Omega$ :

Costo di depurazione  $C$



	$\omega_1$	$\omega_2$
$q(1, \omega)$	24	33
$q(2, \omega)$	24	33
$q(3, \omega)$	30	30

	$\omega_1$	$\omega_2$
$c_\omega(\{1, 2, 3\})$	$2 + \delta$	$2 + \delta$
$c_\omega(\{1, 2\})$	1	$3/2$
$c_\omega(\{1, 3\})$	$4/3$	$4/3$
$c_\omega(\{2, 3\})$	$4/3$	$4/3$
$c_\omega(\{1\})$	1	1
$c_\omega(\{2\})$	1	1
$c_\omega(\{3\})$	1	1

### Neutral risk attitude.

Il costo di ogni coalizione e' la media dei costi sugli stati di natura.

Puo' essere il caso in cui ogni coalizione e' d'accordo nell'utilizzare qualche servizio supplementare soltanto quando l'ammontare di acqua inquinata eccede una certa soglia.

Nell'esempio, il gioco dell'acqua  $c'(S) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) c_{\omega}(S)$  e' tale che:

$c'(\{1,2,3\})$	$2+\delta$
$c'(\{1,2\})$	$4/3$
$c'(\{1,3\})$	$4/3$
$c'(\{2,3\})$	$4/3$
$c'(\{1\})$	1
$c'(\{2\})$	1
$c'(\{3\})$	1

Facendo i conti sul nucleo si ricava che:

se  $\delta \leq 0$ , l'allocazione  $(2/3+\delta, 2/3+\delta, 2/3-\delta) \in \text{Core}(c')$ .  
Se  $\delta=0$  e' anche l'unica.

### Grande avversione al rischio.

Il costo di ogni coalizione e' quello del caso peggiore.

Potrebbe essere il caso in cui ogni coalizione si trova d'accordo nel scegliere l'opzione di costruire l'impianto piu' grosso al fine di prevenire una situazione di superinquinamento come conseguenza dello stato di natura peggiore.

Nell'esempio, il gioco dell'acqua  $c^*(S) = \max_{\omega \in \Omega} c_{\omega}(S)$  e' tale che:

$c^*(\{1,2,3\})$	$2+\delta$
$c^*(\{1,2\})$	$3/2$
$c^*(\{1,3\})$	$4/3$
$c^*(\{2,3\})$	$4/3$
$c^*(\{1\})$	1
$c^*(\{2\})$	1
$c^*(\{3\})$	1

Facendo i conti sul nucleo si ricava che:

se  $\delta \leq 1/12$ , l'allocazione  $(2/3+\delta, 2/3+\delta, 2/3-\delta) \in \text{Core}(c^*)$

## Gioco dell'acqua stocastico.

E' stato assunto che ad ogni coalizione corrispondesse la possibilita' di scegliere un'unica azione.

Quindi il gioco stocastico con  $N=\{1,2,3\}$ ,  $\Omega=\{\omega_1, \omega_2\}$  ep( $\omega_1$ )=1/3 e p( $\omega_2$ )=2/3 e'

$$X_{\{1,2,3\}} = 2 + \delta \quad X_{\{1,2\}} = \begin{cases} 1 & \text{in state } \omega_1 \\ 3/2 & \text{in state } \omega_2 \end{cases} \quad X_{\{1,3\}} = 4/3 \quad X_{\{2,3\}} = 4/3$$

$$X_{\{1\}} = 1 \quad X_{\{2\}} = 1 \quad X_{\{3\}} = 1$$

Inoltre assumeremo che i giocatori 1 e 2 abbiano preferenze di vN-M identiche, in particolare si assume che i giocatori 1 e 2 abbiano la stessa avversione la rischio.

Inoltre ancora una volta si suppone non siano possibili trasferimenti certi ( $d_i=0$ ).

Pavia, 28 Aprile 2004

Almo Collegio Borromeo

21

## Sul nucleo del water game stocastico

Si consideri l'allocazione  $(2/3+\delta, 2/3+\delta, 2/3-\delta)$

Per i giocatori in  $\{1,2\}$ , per via del fatto che questi giocatori hanno uno stesso "grado" di avversione al rischio, la divisione ottimale per sostenere un obiezione ad un'allocazione proposta di  $X_{\{1,2,3\}}$  e' la divisione equa di  $X_{\{1,2\}}$  (cioe'  $1/2 X_{\{1,2\}}$ ).

Allora, dalla concavita' della funzione di utilita', per  $i \in \{1,2\}$  e' possibile che

$$k \geq 2/3 + \delta$$

Dove  $K$  e' l'equivalente certo per i giocatori  $i \in \{1,2\}$  della lotteria  $1/2 X_{\{1,2\}}$ . Detto diversamente, per  $\delta$  s.t  $0 \leq \delta < 1/12$

$$c^*(S) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) c_{\omega}(S) \quad c^*(S) = \max_{\omega \in \Omega} c_{\omega}(S)$$

E' possibile avere livelli intermedi di avversione la rischio per cui  $(2/3+\delta, 2/3+\delta, 2/3-\delta)$  giace nel nucleo del water game stocastico.



# An Object Oriented approach to Game Theory



By Stefano Moretti

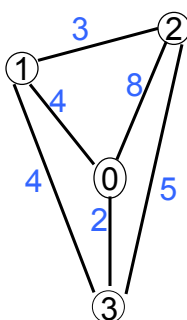
*Departement of Mathematics  
Univeristy of Genoa and  
member of Scaλλywag*

[www.scallywag.it/tugame.html](http://www.scallywag.it/tugame.html)

This is a project supported by Scaλλywag.



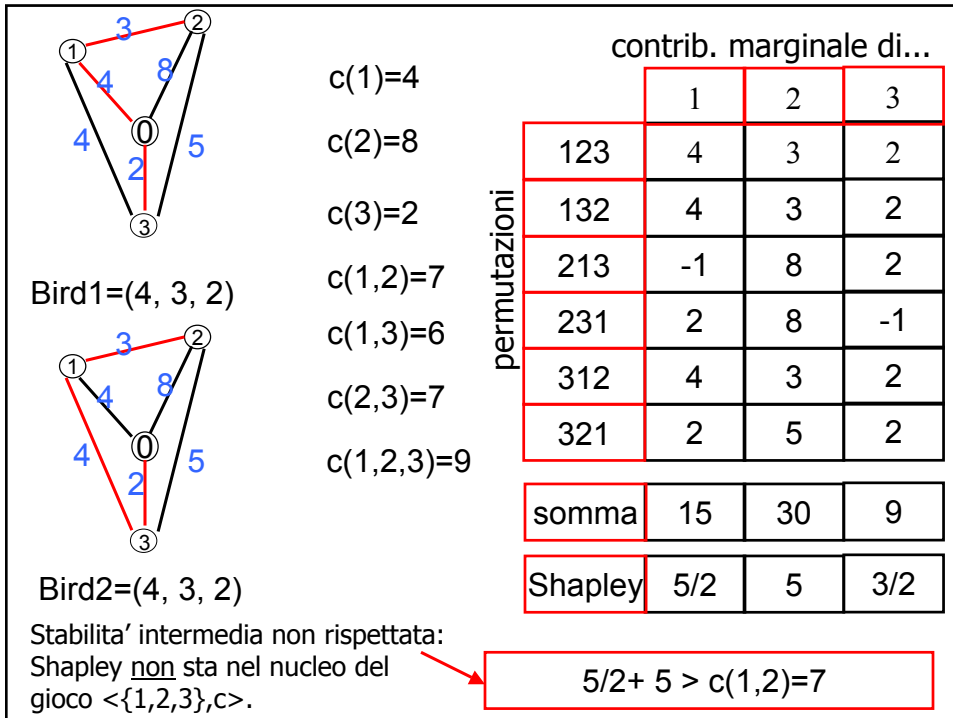
*Esercizio:*



Si consideri la situazione mcst disegnata in figura. Determinare:

- il corrispondente gioco mcst;
- le allocazioni date dalla regola di Bird;
- il valore Shapley del gioco corrispondente.

Dire se le allocazioni di cui sopra (Bird e Shapley) stanno nel nucleo del gioco mcst.



### Esercizio:

Sulla base delle considerazioni fatte nell'esempio "Gelateria", provare a costruire un gioco a utilita' trasferibile (deterministico) che assegni ad ogni coalizione l'opportuno valore atteso di guadagno stocastico.

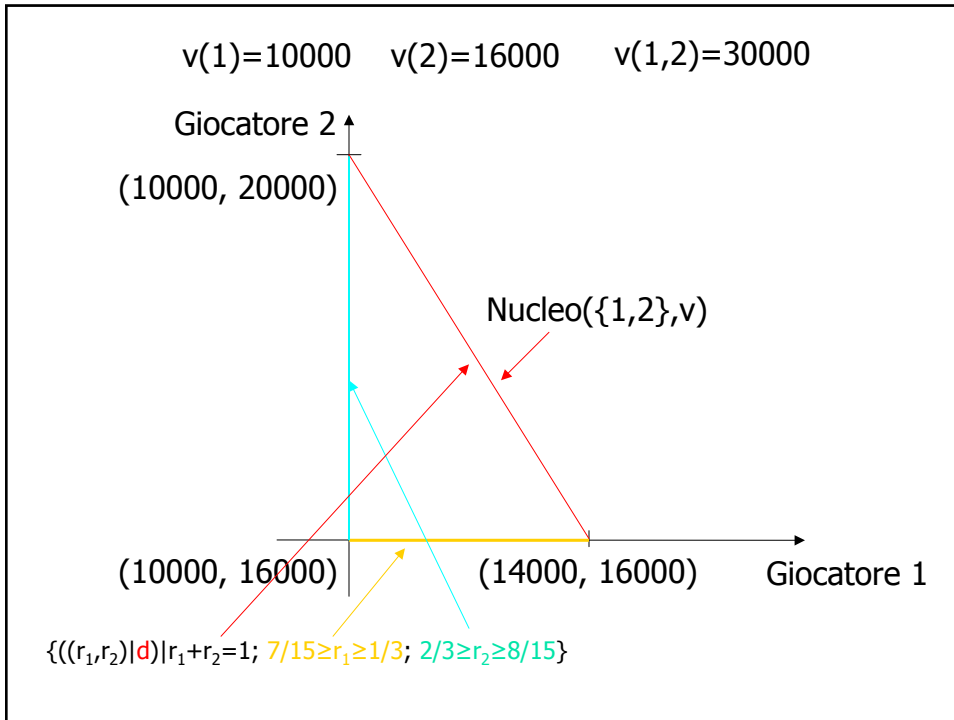
Trovare il nucleo di tale gioco.

Vedete dei punti di contatto tra il gioco stocastico e quello deterministico? E tra i rispettivi nuclei?

Intuitivamente, pensate che tali punti di contatto, se esistono, continuerebbero ad esistere se il giocatore 1 fosse avverso al rischio? Come pensate che potrebbe evolvere il problema di allocazione in tale circostanza (intendo nei termini della struttura del nucleo del gioco stocastico)?

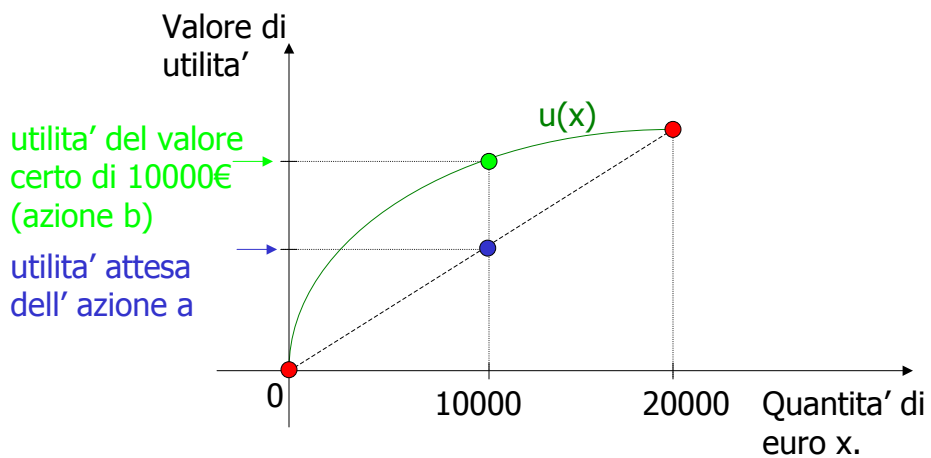
a		b	
$X_{\{1\}}(a) = \begin{cases} 20000\text{€ con } p=0.5 \text{ (se esce rosso)} \\ 0 \text{ con } p=0.5 \text{ (se esce nero)} \end{cases}$		$X_{\{1\}}(b) = 10000\text{€ con } p=1 \text{ (con certezza)}$	
c			
$X_{\{2\}}(c) = \begin{cases} 20000\text{€ con probabilita' } 0.5 \text{ (se e' una stagione calda)} \\ 12000\text{€ con probabilita' } 0.5 \text{ (se e' una stagione fredda)} \end{cases}$			
d		e	
$X_{\{1,2\}}(d) = \begin{cases} 20000\text{€ con } p=0.5 \text{ (se e' una stagione poco piovosa)} \\ 40000\text{€ con } p=0.5 \text{ (se e' una stagione molto piovosa)} \end{cases}$		$X_{\{1,2\}}(d) = \begin{cases} 45000\text{€ con } p=1/3 \text{ (se il mercato e' favorevole)} \\ 15000\text{€ con } p=2/3 \text{ (se il mercato non e' favorev.)} \end{cases}$	

a		b	
10000€		10000€	
c			
16000€			
d		e	
30000€		25000€	

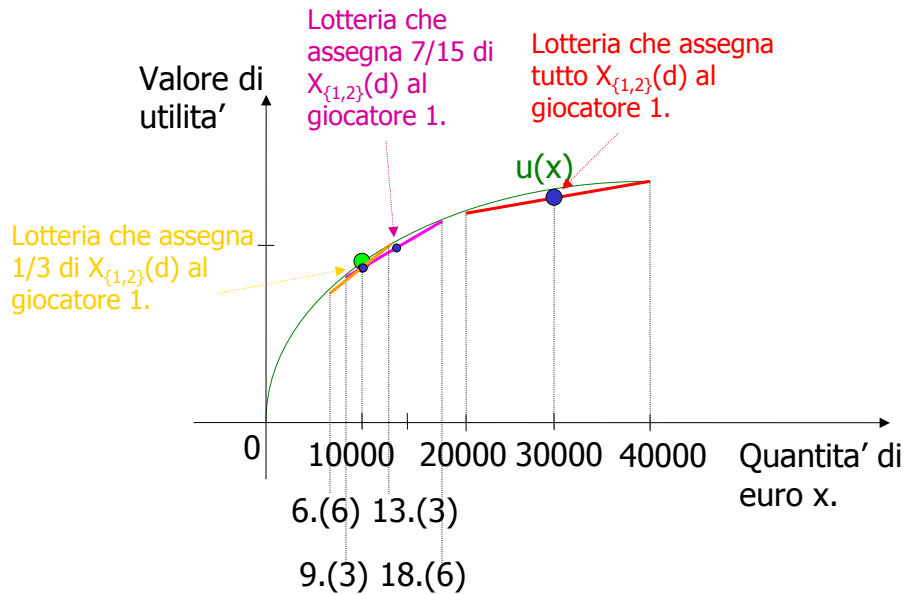


## Giocatore 1 avverso al rischio

Confronto tra lotteria  $a$  e  $b$ .



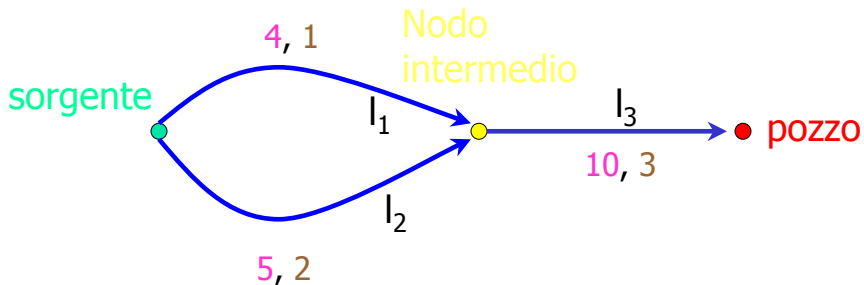
## Giocatore 1 avverso al rischio



**Parte facoltativa:  
giochi di flusso**  
(non trattata durante il corso e non considerata nell'esame finale: per ogni richiesta di chiarimento contattare il docente.)

## Flow Situation

$N = \{1, 2, 3\}$  insieme dei giocatori



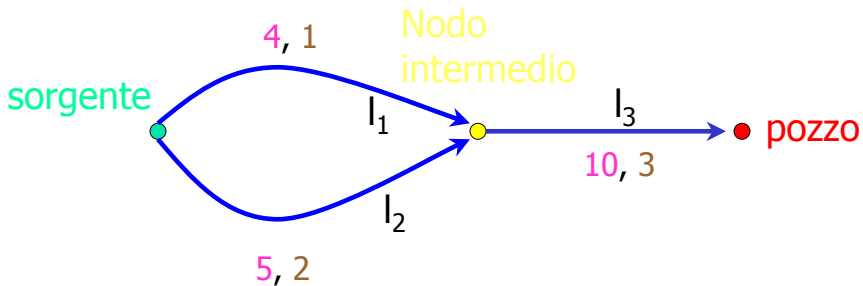
- Ad ogni arco orientato sono associati due numeri:
  - Il primo numero rappresenta la portata dell'arco;
  - Il secondo numero rappresenta il giocatore che gestisce il flusso in quell'arco.
- Per ogni unità di flusso che va dalla sorgente al pozzo si guadagna 1€

## Flow problem

- Dato un gruppo di giocatori ed i relativi archi che essi gestiscono, si vuole massimizzare il flusso che va dalla sorgente al pozzo passando per tali archi.
- Non si può ovviamente varcare la portata di ciascun arco.
- Nei nodi intermedi la somma dei flussi in uscita deve essere uguale alla somma dei flussi in entrata.
- La somma dei flussi in uscita dalla sorgente deve essere uguale alla somma dei flussi in entrata nel pozzo.

# Flow game

$\langle \{1,2,3\}, v \rangle$



$$v(1)=v(2)=v(3)=0$$

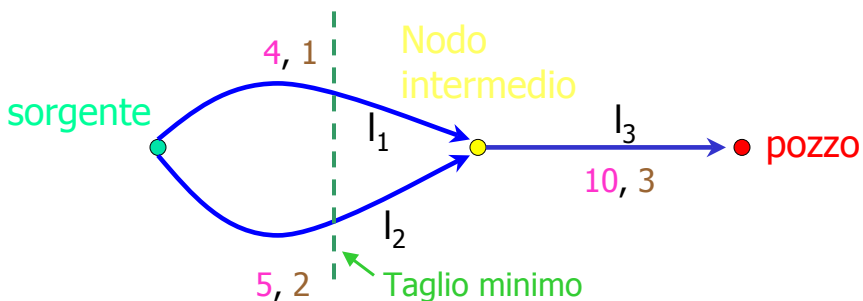
$$v(1,2)=0$$

$$v(1,3)=4$$

$$v(2,3)=5$$

$$v(1,2,3)=9$$

# Note sui giochi flow



- Dal teorema di Ford-Fulkerson (max-flow min-cut theorem) il flusso massimo nella situazione e' dato dal "taglio minimo" delle portate (che separa la sorgente dal pozzo);
- Tale taglio minimo genera un'allocazione particolare (4,5,0) che sta nel nucleo del gioco.