



Giochi cooperativi stocastici: introduzione ai concetti di base, alcune applicazioni*

Stefano Moretti

Dipartimento di Matematica, Università di Genova

Email: moretti@dima.unige.it

Phone: 010-3536838

Pavia, 21 Aprile 2004

Almo Collegio Borromeo

1

* Ringrazio lo studente del corso Claudio Bianchi per aver segnalato alcuni errori in queste e nelle altre dispense delle mie lezioni.

TU game "deterministico"

- Un **gioco cooperativo a utilità trasferibile (TU-game)** è una coppia ordinata $\langle N, v \rangle$ dove
 - $N = \{1, 2, \dots, n\}$ è l'insieme dei giocatori
 - $v: 2^N \rightarrow \mathfrak{R}^+$ è la funzione caratteristica del gioco che assegna ad ogni coalizione $S \in 2^N$ un numero reale (*guadagno*) $v(S)$ e dove $v(\emptyset) = 0$.
- **Esempio:**
 - $N = \{1, 2, 3\}$
 - $v(1) = v(2) = 2$, $v(3) = 3$, $v(1, 2) = 5$, $v(1, 3) = 6$, $v(2, 3) = 8$, $v(1, 2, 3) = 11$.

Pavia, 21 Aprile 2004

Almo Collegio Borromeo

2

Giochi cooperativi stocastici

- Due maggiori differenze dai giochi “deterministici”:
 - I *payoff* (guadagni) possono essere variabili casuali
 - Le azioni che una coalizione può scegliere di mettere in atto sono esplicitamente indicate nel modello.
 - In realtà anche nel modello deterministico le coalizioni possono scegliere tra molte azioni disponibili (dipende dalla situazione) ma poiché l’obiettivo è quello di massimizzare un guadagno deterministico non ci sono dubbi sull’azione che verrà scelta: sarà quella che massimizza il guadagno.

Variabile aleatoria

- Si vuole scrivere matematicamente il risultato di un esperimento;
- Una *variabile aleatoria* (detta anche *stocastica* o *casuale*) è semplicemente una funzione il cui valore rappresenta il risultato dell’esperimento.
 - Esempio: esperimento “lancio di un dado non truccato”. Il risultato dell’esperimento è la faccia rivolta verso l’alto:

$$X \text{ (dado)} = \begin{cases} 1 \text{ se esce } & \text{•} \\ 2 \text{ se esce } & \text{••} \\ 3 \text{ se esce } & \text{•••} \\ 4 \text{ se esce } & \text{••••} \\ 5 \text{ se esce } & \text{•••••} \\ 6 \text{ se esce } & \text{••••••} \end{cases}$$

Altro Esempio: esperimento "lancio di una moneta non truccata". Il risultato e' la faccia rivolta verso l'alto:

$$X^{\bullet} = \begin{cases} 1 & \text{se esce } \textcircled{T} \\ 0 & \text{se esce } \textcircled{C} \end{cases}$$

Distribuzione di probabilita'

Se si vuole anche rappresentare la distribuzione di probabilita' sugli *eventi* dell'esperimento bastera' scrivere la *funzione di distribuzione* accanto:

$$X^{\bullet} = \begin{cases} 1 & \text{con probabilita' } 0.5 \\ 0 & \text{con probabilita' } 0.5 \end{cases}$$

- Per comodita' d'ora in avanti indichero' con il nome **variabile aleatoria** la variabile aleatoria con scritto accanto la sua distribuzione di probabilita' derivante dall'esperimento.
- Nell'esempio del dado sara' detta quindi variabile aleatoria l'oggetto:

$$X^{\square} = \begin{cases} 1 & \text{con probabilita' } 1/6 \\ 2 & \text{con probabilita' } 1/6 \\ 3 & \text{con probabilita' } 1/6 \\ 4 & \text{con probabilita' } 1/6 \\ 5 & \text{con probabilita' } 1/6 \\ 6 & \text{con probabilita' } 1/6 \end{cases}$$

Guadagni stocastici

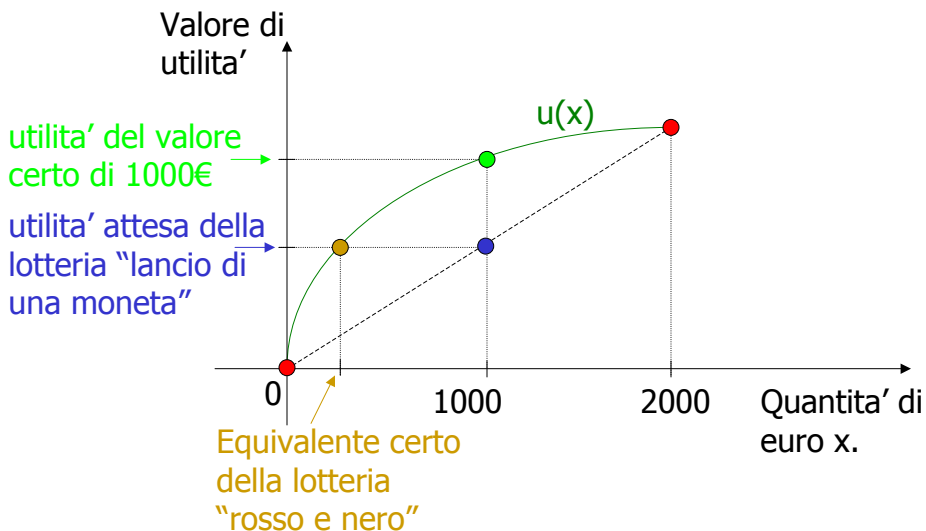
Esempio di guadagno stocastico X : si vuole rappresentare la *lotteria* "lancio di una moneta" in cui se esce TESTA si vincono 2000€ e se esce CROCE si vince 0. Il guadagno stocastico e' la variabile stocastica

$$X = \begin{cases} 2000\text{€ con probabilita' } 0.5 \\ 0 \text{ con probabilita' } 0.5 \end{cases}$$

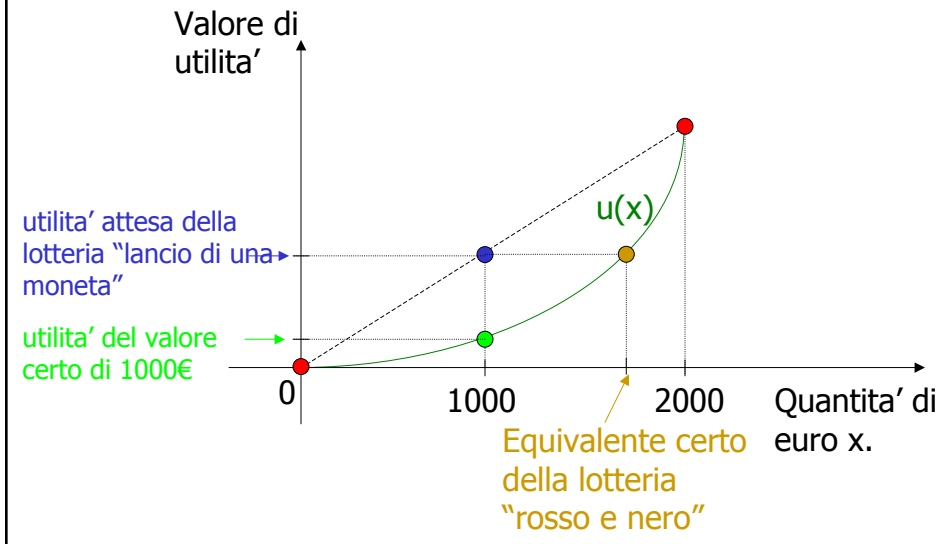
Immaginate che un "filantropo" vi proponga di scegliere tra due alternative: partecipare alla lotteria "lancio di una moneta" oppure ricevere 1000€ con certezza.

Voi cosa scegliereste?

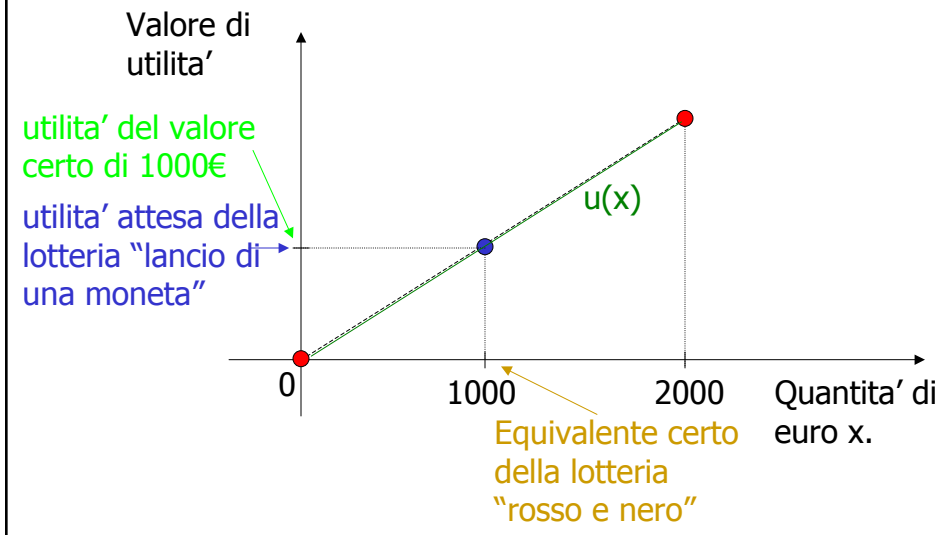
Giocatori avversi al rischio



Giocatori propensi al rischio



Giocatori neutrali al rischio



Giochi stocastici

Un gioco cooperativo stocastico (**gcs**) (Suijs et al. (1995)) e' una tupla

$\Gamma = (N, (A_S)_{S \subseteq N}, (X_S)_{S \subseteq N}, (\succsim_i)_{i \in N})$ dove:

- A_S e' l'insieme delle azione che una coalizione $S \subseteq N$ puo' scegliere
- $X_S: A_S \rightarrow L^1(\mathbb{R})$ e' una funzione che assegna ad ogni azione $a \in A_S$ della coalizione S il guadagno stocastico con valore atteso finito $X_S(a)$;
- $(\succsim_i)_{i \in N}$ e' il profilo di preferenze per i giocatori in N sui guadagni stocastici.

Preferenze dei giocatori

- Dati due guadagni stocastici (con valore atteso finito) X ed Y , scriveremo

$$X \succsim_i Y$$

quando il guadagno stocastico X e' almeno altrettanto buono del guadagno stocastico Y secondo le preferenze del giocatore $i \in N$

- Scriveremo invece

$$X \succ_i Y$$

quando il guadagno stocastico X e' strettamente preferito al guadagno stocastico Y secondo le preferenze del giocatore $i \in N$.

Esempio "Gelateria" (azioni):

- Due giocatori $\{1,2\}$. Il giocatore 1 possiede una gelateria mentre il giocatore 2 possiede 10000€
- I seguenti insiemi di azioni disponibili:

$A_{\{1\}}$	b	a
	Tenere il proprio capitale in banca (con tasso di interesse nullo)	Giocare tutto alla roulette sul "rosso e nero"
$A_{\{2\}}$	c	
	Vendere gelati	
$A_{\{1,2\}}$	d	e
	Convertire la gelateria in videoteca	Convertire la gelateria in agenzia immobiliare

Segue l'Esempio "Gelateria": guadagni stocastici.

- Come conseguenza delle precedenti azioni e degli *stati del mondo* (indicati in rosso) che si verificheranno con una certa distribuzione di probabilita' nota a priori, le coalizioni riceverebbero i seguenti guadagni stocastici:

a		b	
$X_{\{1\}}(a) = \begin{cases} 20000\text{€ con } p=0.5 \text{ (se esce rosso)} \\ 0 \text{ con } p=0.5 \text{ (se esce nero)} \end{cases}$		$X_{\{1\}}(b) = 10000\text{€ con } p=1 \text{ (con certezza)}$	
c			
$X_{\{2\}}(c) = \begin{cases} 20000\text{€ con probabilita' } 0.5 \text{ (se e' una stagione calda)} \\ 12000\text{€ con probabilita' } 0.5 \text{ (se e' una stagione fredda)} \end{cases}$			
d		e	
$X_{\{1,2\}}(d) = \begin{cases} 20000\text{€ con } p=0.5 \text{ (se e' una stagione poco piovosa)} \\ 40000\text{€ con } p=0.5 \text{ (se e' una stagione molto piovosa)} \end{cases}$		$X_{\{1,2\}}(e) = \begin{cases} 45000\text{€ con } p=1/3 \text{ (se il mercato e' favorevole)} \\ 15000\text{€ con } p=2/3 \text{ (se il mercato non e' favorev.)} \end{cases}$	

Allocazioni stocastiche

- La prima conseguenza dell'aver guadagni stocastici e' che anche le allocazioni sono stocastiche (in quanto ripartizioni di guadagni stocastici);
- Poiche' inoltre in questo modello ogni coalizione ha a disposizione un diverso insieme di azioni tra cui puo' scegliere, e' conveniente definire le allocazioni a livello di ciascuna coalizione.

Quindi si definisce **allocazione di un guadagno stocastico** $X_S(\alpha)$ ($\alpha \in A_S$ e' un'azione disponibile per la coalizione S) per la coalizione S l'oggetto $((r_1, \dots, r_{|S|}) | \alpha) \in \mathbb{R}^S$ tale che $r_i \geq 0$ per ogni $i \in S$ ed inoltre $\sum_{i \in S} r_i = 1$

Segue l'Esempio "Gelateria": allocazioni stocastiche.

- Per la coalizione $\{1\}$ le uniche due allocazioni possibili saranno gli elementi dell'insieme

$$Z(\{1\}) = \{((1)|a), ((1)|b)\}.$$

- Per la coalizione $\{2\}$ l'unica allocazione possibile sara' data dall'insieme

$$Z(\{2\}) = \{((1)|c)\}.$$

- Per la coalizione $\{1,2\}$ l'insieme delle allocazioni sara'

$$Z(\{1,2\}) = \{((r_1, r_2)|d) | r_1 + r_2 = 1, r_1 \geq 0, r_2 \geq 0\} \cup \{((r_1, r_2)|e) | r_1 + r_2 = 1, r_1 \geq 0, r_2 \geq 0\}.$$

Segue l'Esempio "Gelateria".

L'allocazione $((0.8, 0.2)|d) \in Z(\{1,2\})$ attribuirà al giocatore 1

$$0.8 X_{\{1,2\}}(d) = 0.8 \begin{cases} 20000\text{€ con } p=0.5 \\ 40000\text{€ con } p=0.5 \end{cases} = \begin{cases} 16000\text{€ con } p=0.5 \\ 32000\text{€ con } p=0.5 \end{cases}$$

mentre attribuirà al giocatore 2

$$0.2 X_{\{1,2\}}(d) = 0.2 \begin{cases} 20000\text{€ con } p=0.5 \\ 40000\text{€ con } p=0.5 \end{cases} = \begin{cases} 4000\text{€ con } p=0.5 \\ 8000\text{€ con } p=0.5 \end{cases}$$

Allocazioni stocastiche piu' qualcosa di certo...

- In realta' **sono permessi anche trasferimenti di denaro deterministici** (anche qualora non siano presenti guadagni certi per le coalizioni);
- si pensi al caso delle assicurazioni: a fronte di dell'assunzione del rischio di un danno probabile da parte della compagnia assicurativa, l'assicurato paga una somma certa alla compagnia, cioe' il *premio*.
- Per semplificare le cose, nel nostro esempio noi assumiamo che non ci sia la possibilita' di effettuare trasferimenti deterministici.

Nucleo

- Dato un gioco stocastico Γ , un'allocazione $((r_1, \dots, r_{|N|}) | \alpha) \in Z(N)$ (dove α e' un'azione a disposizione della grande coalizione N) si dice che appartiene al nucleo del gioco stocastico Γ quando **per ogni coalizione $S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ non esiste** allocazione $((r^*_1, \dots, r^*_{|S|}) | \alpha^*) \in Z(S)$ (dove α^* e' un'azione a disposizione della coalizione S) tale che

$$((r^*_1, \dots, r^*_{|S|}) | \alpha^*)_i \succ_i ((r_1, \dots, r_{|N|}) | \alpha)_i$$

per ogni $i \in S$.

Segue l'Esempio "Gelateria": preferenze.

- Come sono fatte le preferenze dei giocatori 1 e 2?
- Si assume che 1 e 2 abbiano preferenze di *von Neumann/Morgenstern*, vale a dire: dati due guadagni stocastici (con valore atteso finito) X ed Y , per ciascuno dei due giocatori giocatore i

$$X \succ_i Y$$

se e solo se

$$E(u(X)) \geq E(u(Y))$$

- Inoltre assumeremo, come ulteriore semplificazione, che 1 e 2 siano neutrali al rischio:

quindi $E(u(X)) \geq E(u(Y))$ equivale a scrivere

$$E(X) \geq E(Y)$$

Segue l'Esempio "Gelateria": confronti tra allocaz.

- Per esempio, $((0.8, 0.2)|d) \succ_1 ((1)|a)$, così come $((0.8, 0.2)|d) \succ_1 ((1)|b)$. Infatti

$$0.8 X_{\{1,2\}}(d) = 0.8 \begin{cases} 20000\text{€ con } p=0.5 \\ 40000\text{€ con } p=0.5 \end{cases} = \begin{cases} 16000\text{€ con } p=0.5 \\ 32000\text{€ con } p=0.5 \end{cases}$$

$$E(0.8 X_{\{1,2\}}(d)) = 0.8 E(X_{\{1,2\}}(d)) = 24000\text{€} > 10000\text{€} = E(X_{\{1\}}(a)) = E(X_{\{1\}}(b)).$$

- D'altro canto $((1)|c) \succ_2 ((0.8, 0.2)|d)$ poiché'

$$0.2 X_{\{1,2\}}(d) = 0.2 \begin{cases} 20000\text{€ con } p=0.5 \\ 40000\text{€ con } p=0.5 \end{cases} = \begin{cases} 4000\text{€ con } p=0.5 \\ 8000\text{€ con } p=0.5 \end{cases}$$

$$E(0.2 X_{\{1,2\}}(d)) = 0.2 E(X_{\{1,2\}}(d)) = 6000\text{€} < 16000\text{€} = E(X_{\{2\}}(c)).$$

Segue l'Esempio "Gelateria": ricerca del nucleo (1/2).

- Confrontiamo prima le allocazioni in $Z(N)$.
- Notiamo che $E(X_{\{1,2\}}(d)) = 30000\text{€} > E(X_{\{1,2\}}(e)) = 25000\text{€}$
- Quindi per ogni $r_1, r_2 \in \mathfrak{R}$, $r_1 + r_2 = 1$, $r_1 \geq 0$, $r_2 \geq 0$ si ha che $E(r_1 X_{\{1,2\}}(d)) = r_1 E(X_{\{1,2\}}(d)) > r_1 E(X_{\{1,2\}}(e)) = E(r_1 X_{\{1,2\}}(e))$
- Analogamente $E(r_2 X_{\{1,2\}}(d)) = r_2 E(X_{\{1,2\}}(d)) > r_2 E(X_{\{1,2\}}(e)) = E(r_2 X_{\{1,2\}}(e))$.
- Ne segue che le allocazioni in $\{((r_1, r_2)|e) | r_1 + r_2 = 1, r_1 \geq 0, r_2 \geq 0\} \subset Z(N)$ **non appartengono al nucleo del gioco stocastico.**

Segue l'Esempio "Gelateria": ricerca del nucleo (2/2).

- Restano da confrontare le allocazioni in $\{((r_1, r_2)|d) | r_1 + r_2 = 1, r_1 \geq 0, r_2 \geq 0\} \subset Z(N)$ con quelle in $Z(\{1\})$ e $Z(\{2\})$.
- Notiamo che solo se $r_1 < 1/3$ allora $E(r_1 X_{\{1,2\}}(d)) = r_1 E(X_{\{1,2\}}(d)) < 10000€ = E(X_{\{1\}}(a)) = E(X_{\{1\}}(b))$ e quindi $((1)|a) \succ_1 ((r_1, r_2)|d)$ [così come $((1)|b) \succ_1 ((r_1, r_2)|d)$];
- inoltre solo se $r_2 < 8/15$ allora $E(r_2 X_{\{1,2\}}(d)) = r_2 E(X_{\{1,2\}}(d)) < 16000€ = E(X_{\{2\}}(c))$, e quindi $((1)|c) \succ_2 ((r_1, r_2)|d)$.
- Di conseguenza **il nucleo del gioco è dato dal sottoinsieme di allocazioni di $Z(N)$**
 $\{((r_1, r_2)|d) | r_1 + r_2 = 1; 7/15 \geq r_1 \geq 1/3; 2/3 \geq r_2 \geq 8/15\}$

- Ricerca teorica (gruppo di Suijs, Tijs, Borm ecc. In Tilburg)
 - Rivedere un po' tutta la teoria dei TU game alla luce dei nuovi ingredienti del modello: avversione/propensione al rischio, azioni disponibili e come tutto ciò influisce sulle proprietà di un gioco e sui concetti di soluzione;
 - problemi assicurativi e ri-assicurativi (tra le compagnie)
 - Giochi mcst stocastici (con i costi casuali di mantenimento delle connessioni), LP games ecc.
- Sguardo alla pratica (gruppo GE+):
 - Problemi di re-assicurazione e co-assicurazione.
 - Applicazione alla gestione delle acque (climate change)

Esercizio:

Sulla base delle considerazioni fatte nell'esempio "Gelateria", provare a costruire un gioco a utilità trasferibile (deterministico) che assegni ad ogni coalizione l'opportuno valore atteso di guadagno stocastico.

Trovare il nucleo di tale gioco.

Vedete dei punti di contatto tra il gioco stocastico e quello deterministico? E tra i rispettivi nuclei?

Intuitivamente, pensate che tali punti di contatto, se esistono, continuerebbero ad esistere se il giocatore 1 fosse avverso al rischio? Come pensate che potrebbe evolvere il problema di allocazione in tale circostanza (intendo nei termini della struttura del nucleo del gioco stocastico)?