



Giochi su grafi, concetti di soluzione e proprietà di monotonia al variare della struttura del gioco

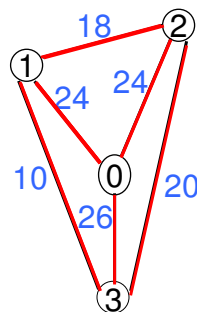
Stefano Moretti

Dipartimento di Matematica, Università di Genova

Email: moretti@dima.unige.it

Phone: 010-3536838

Esempio: Il gioco cooperativo dei costi $\langle \{1,2,3\}, c \rangle$ dato dalla mcst situation precedente e' tale che:



$$c(1)=24$$

$$c(2)=24$$

$$c(3)=26$$

$$c(1,3)=34$$

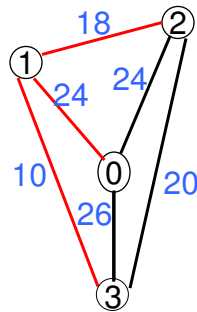
$$c(1,2)=42$$

$$c(2,3)=44$$

$$c(1,2,3)=52$$

Prop. Un mcst game $\langle N, c \rangle$ e' fortemente subadditivo.

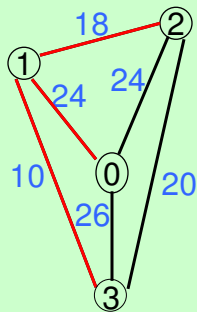
Regola di Bird



- Il predecessore di 1 e' 0: quindi l'allocazione di Bird assegna a 1 il costo di $\{1,0\}$.
- Il predecessore di 2 e' 1: quindi l'allocazione di Bird assegna a 2 il costo di $\{2,1\}$;
- Il predecessore di 3 e' 1: quindi l'allocazione di Bird assegna a 3 il costo di $\{1,3\}$.

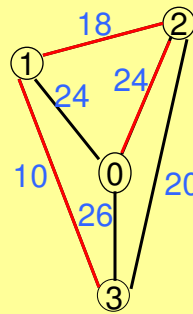
$$w(\Gamma)=52$$

$$\text{Bird1}=(x_1, x_2, x_3)=(24, 18, 10)$$



L'allocazione di Bird rispetto a questo albero di ricoprimento di minimo costo e'

$$(x_1, x_2, x_3)=(24, 18, 10)$$

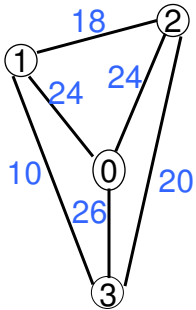


L'allocazione di Bird rispetto a questo albero di ricoprimento di minimo costo e'

$$(x_1, x_2, x_3)=(18, 24, 10)$$

Entrambe le allocazioni appartengono al nucleo del gioco mcst (ed anche la loro combinazione convessa).

Valore Shapley di un gioco mst



- $c(1)=24$
- $c(2)=24$
- $c(3)=26$
- $c(1,3)=34$
- $c(1,2)=42$
- $c(2,3)=44$
- $c(1,2,3)=52$

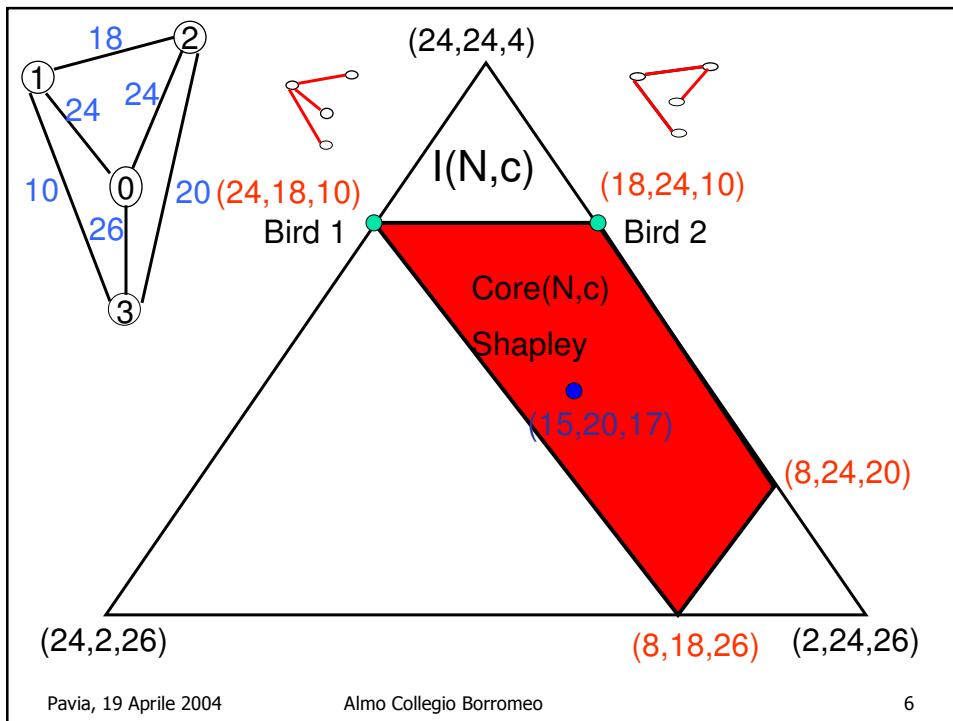
contrib. marginale di...

	1	2	3	
permutazioni	123	24	18	10
	132	24	18	10
	213	18	24	10
	231	8	24	20
	312	8	18	26
	321	8	18	26
	somma	90	120	102
Shapley	15	20	17	

Pavia, 19 Aprile 2004

Almo Collegio Borromeo

5



Pavia, 19 Aprile 2004

Almo Collegio Borromeo

6

Allocazione Bird vs. valore Shapley

- Regola di Bird:
 - Esiste sempre (dato un gioco mcst). (+)
 - In genere non e' unica (ce ne sono tante quante gli alberi di ricoprimento di minimo costo). (-)
 - Tutte le allocazioni di Bird Stanno nel nucleo del gioco mcst. (+)
- Valore Shapley:
 - Esiste sempre (dato un TU-game, quindi anche un gioco mcst). (+)
 - E' unica. (+)
 - Non ci sono garanzie che stia nel nucleo del gioco mcst. (-)

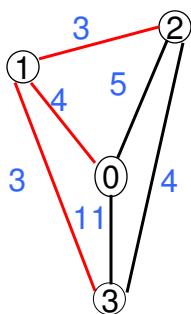
Pavia, 19 Aprile 2004

Almo Collegio Borromeo

7

I giochi concavi hanno Shapley nel nucleo...

Un gioco dei costi si dice *concavo* se per ogni giocatore c'e' convenienza ad unirsi a coalizioni via via sempre piu' grandi:



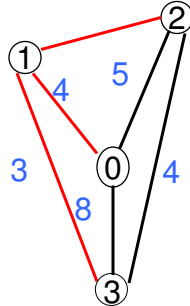
Esempio: Il giocatore 2 valuta se e' per lui piu' conveniente unirsi alla coalizione {1,3} o alla coalizione {3}:

$$c(1,2,3) - c(1,3) = 10 - 7 = 3$$

$$c(2,3) - c(3) = 9 - 11 = -2$$

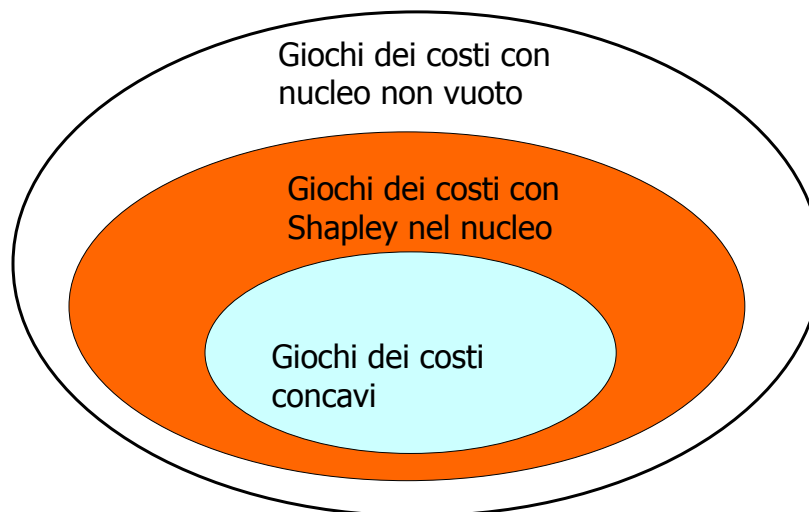
Il contributo (*marginale*) di 2 alla coalizione {3} e' inferiore al contributo (*marginale*) di 2 alla coalizione {1,3}. Quindi 2 ha convenienza ad unirsi a {3}, che e' piu' piccolo di {1,3}. **Il gioco non e' concavo!**

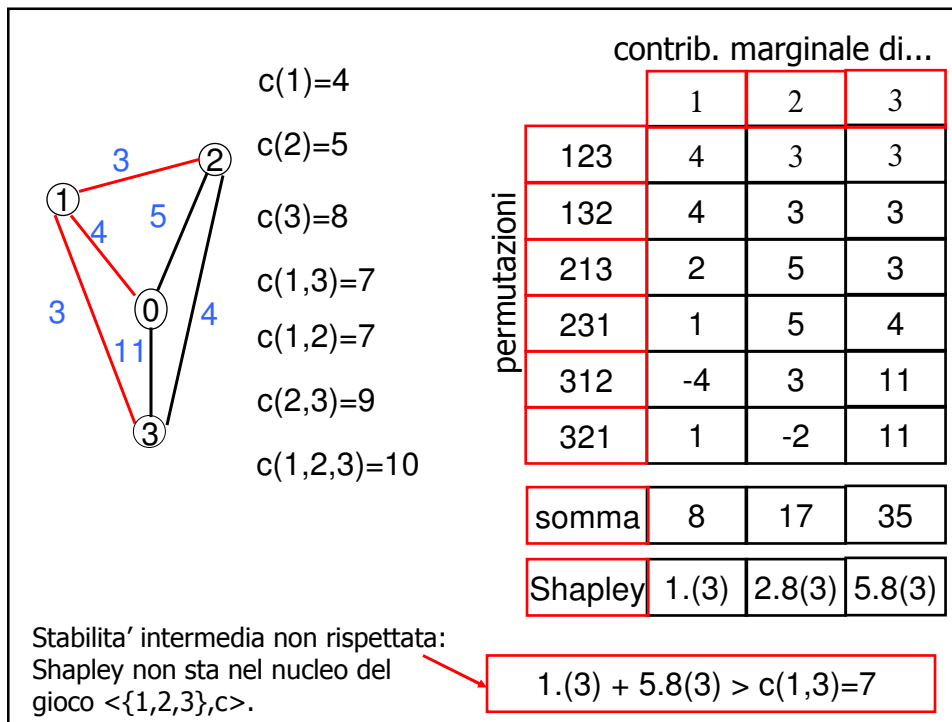
...ma i giochi non concavi possono avere Shapley nel nucleo.



S	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
c(S)	4	5	8	7	7	9	10
$\sum_{i \in S} \phi_i$	1.8(3)	3.(3)	4.8(3)	5.1(6)	6.(6)	8.1(6)	10

Riassumendo:

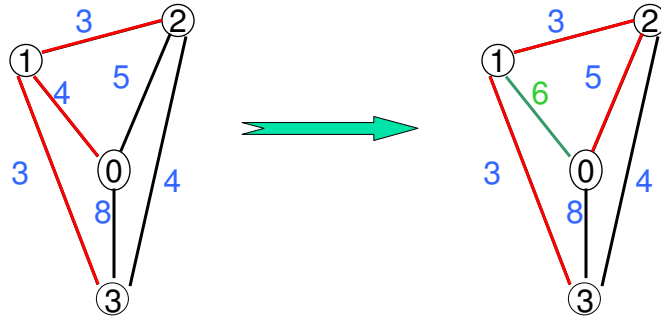




Altre considerazioni per valutare i metodi di allocazione: andare a vedere cosa succede quando varia la struttura della situazione mcst

- Si immagini di utilizzare una certa regola per allocare i costi.
 - Puo' aumentare il costo dei lati: se il costo di una connessione aumenta nessuno dovrebbe venire a pagare di meno in base alla regola di allocazione in uso (*monotonia sui costi*);
 - Un giocatore lascia la situazione: nessuno e' avvantaggiato dalla sua partenza in base alla regola di allocazione in uso (*monotonia sui giocatori*).

Monotonia sui costi: comportamento di Bird.



Allocazione di Bird: (4, 3, 3)

Allocazione di Bird: (3, 5, 3)

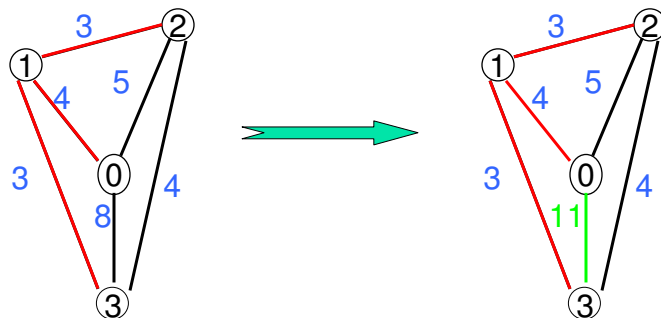
→ La regola di Bird non soddisfa la monotonia sui costi.

Pavia, 19 Aprile 2004

Almo Collegio Borromeo

13

Monotonia sui costi: comportamento di Shapley.

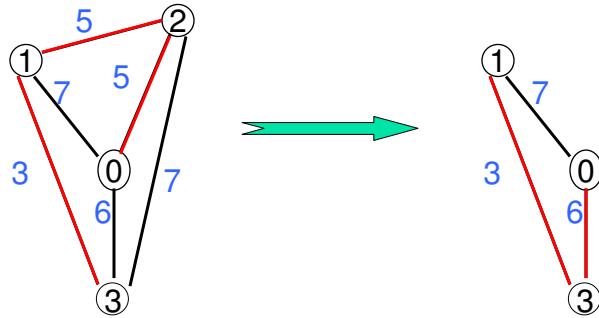


Valore Shapley:
(1.8(3), 3.(3), 4.8(3))

Valore Shapley:
(1.(3), 2.8(3), 5.8(3))

→ Il valore Shapley non soddisfa la monotonia sui costi.

Monotonia sui giocatori: comportamento di Bird.



Allocazione di Bird: (5, 5, 3)

Allocazione di Bird: (3, *, 6)

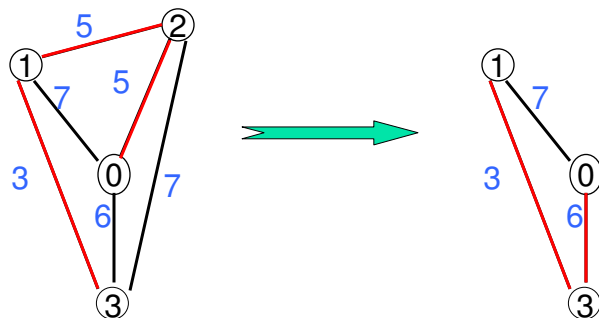
→ La regola di Bird non soddisfa la monotonia sui giocatori.

Pavia, 19 Aprile 2004

Almo Collegio Borromeo

15

Monotonia sui giocatori: comportamento di Shapley.



Valore Shapley:
(4, (3), 4, (3))

Valore Shapley:
(5, *, 4)

→ Il valore Shapley non soddisfa la monotonia sui giocatori.

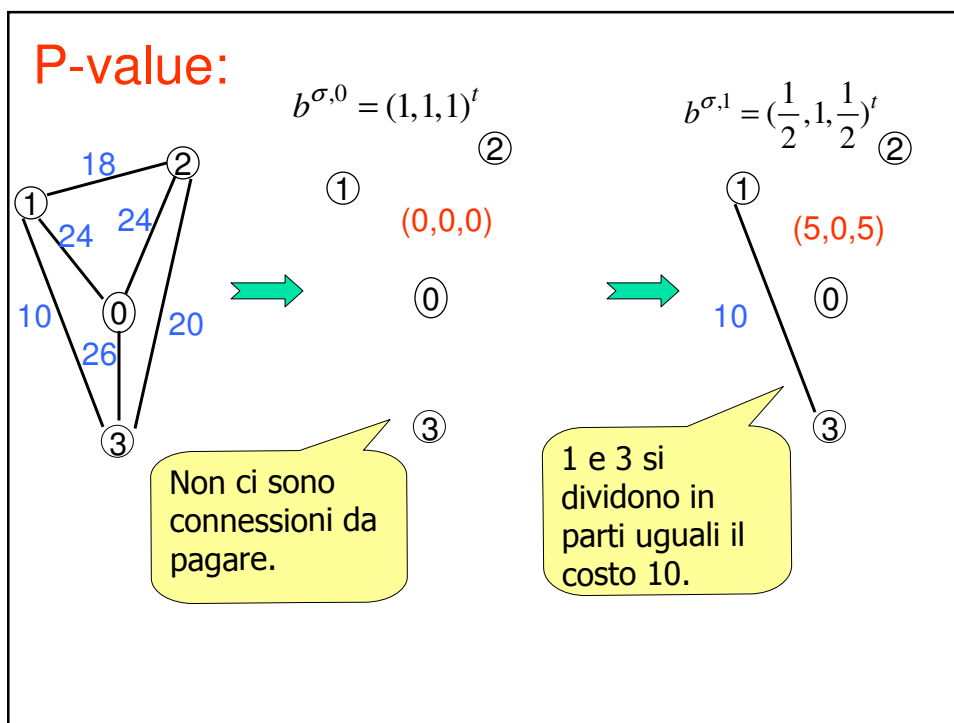
Nuova soluzione: il P-value

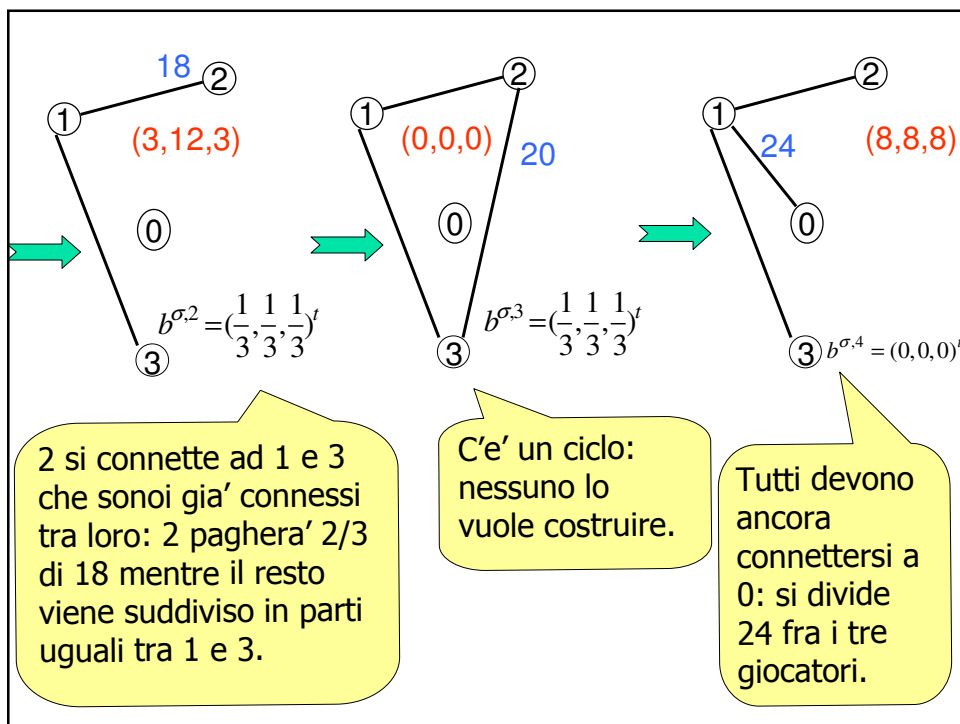
- Esiste sempre (dato un gioco mcst).
- E' unica.
- Sta nel nucleo del gioco mcst.
- Soddisfa la proprieta' di monotonia sui costi.
- Soddisfa la proprieta' di monotonia sui giocatori.
- Ecc. (per esempio determina *pmas*)

Pavia, 19 Aprile 2004

Almo Collegio Borromeo

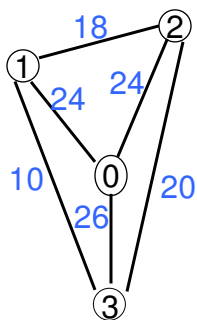
19





P-value.

Si sommano tutte le allocazioni parziali:



$$c(1)=4$$

$$c(2)=5$$

$$c(3)=8$$

$$c(1,3)=7$$

$$c(1,2)=7$$

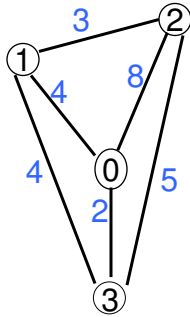
$$c(2,3)=9$$

$$c(1,2,3)=10$$

$$\begin{aligned} &(0, 0, 0) + \\ &(5, 0, 5) + \\ &(3, 12, 3) + \\ &(0, 0, 0) + \\ &(8, 8, 8) = \end{aligned}$$

$$\text{P-value} = (16, 20, 16)$$

Esercizio:



Si consideri la situazione mcst disegnata in figura. Determinare:

- il corrispondente gioco mcst;
- le allocazioni date dalla regola di Bird;
- il valore Shapley del gioco corrispondente.

Dire se le allocazioni di cui sopra (Bird e Shapley) stanno nel nucleo del gioco mcst.