Rapporto Tecnico IMA N. 11/2001

Giochi semplici, indici di potere e scelte sociali.

S. Moretti
Istituto per la Matematica Applicata, Consiglio Nazionale delle Ricerche
Via De Marini 6 (Torre di Francia), 16149 Genova

F. Patrone
Dipartimento di Matematica, Università di Genova
Via Dodecaneso 35, 16146 Genova

Prefazione: Queste note sono state realizzate dagli autori per una serie di tre conferenze che il Prof.Fioravante Patrone ha tenuto presso l'Istituto Regionale di Ricerca Sperimentazione e Aggiornamento Educativi (IRRSAE) Liguria nelle date del 22 e 29 Novembre e 5 Dicembre 2000.
Le tre conferenze sono ispirate da un'idea di fondo: fornire un esempio di matematica che sia al tempo stesso sufficientemente elementare, ma anche tale da fornire un quadro modellistico di notevole interesse, per il significato dei temi trattati.
L'elementarità della trattazione è importante, perchè consente di pensare sul serio ad un trasferimento didattico di questi argomenti a livello di scuola (secondaria superiore). Si noti che per il corpo centrale dell'argomento gli strumenti usati non vanno al di là di insiemistica, funzioni, sommatorie et similia. In possibili estensioni intervengono anche strumenti più sofisticati, come integrali e calcolo delle probabilità.
Anche se i prerequisiti matematici sono veramente pochi, non è il caso però di nascondere che per una comprensione adeguata occorre avere una certa dimestichezza col modo di lavorare tipicamente matematico. Ovvero abitudine al discorso formale e rigoroso. Tanto è vero che la parte in cui vengono discussi assiomaticamente gli indici di potere offre un interessante modello che potrebbe essere utilizzato come complemento alla consueta geometria euclidea, per discutere alcuni aspetti quali ad esempio l'indipendenza degli assiomi.
Dal lato del significato dell'argomento proposto, questo si presenta come un'occasione di straordinario interesse per vedere come espressioni matematiche, condizioni formali, abbiano un senso. In tutte e tre le conferenze si incontrano formulazioni matematiche, assiomi, condizioni, che possono es-

sere lette, interpretate: basti citare come esempio la condizione di "giocatore di veto" per un gioco semplice, la condizione di "anonimità" che si richiede ad un indice di potere, la richiesta di "non manipolabilità" per una regola di scelta collettiva.

Dal punto di vista del significato della matematica presentata, un paio di elementi si aggiungono all'interesse per così dire di carattere generale. Uno è che si tratta di un'area di applicazione che è al di fuori dei contesti più standard (in primis, la fisica). L'altro è che i temi proposti sono anche relativamente recenti. Alcuni sono ancora "freschi di ricerca": taluni sono risultati degli anni '70, ma almeno in un caso si vanno a menzionare contributi recentissimi (appena pubblicati su riviste scientifiche o ancora in attesa di apparire).

Agli elementi citati in precedenza si può aggiungere infine che sono molti gli spunti offerti per un lavoro di carattere inter-multidisciplinare. Per concludere, descriviamo infine brevemente il contenuto delle tre conferenze. La prima si occupa del costrutto formale detto "gioco semplice", che è uno strumento modellistico fondamentale per la rappresentazione di organismi deliberanti (Parlamento, consigli di amministrazione, etc.) che si esprimono attraverso votazioni.

La seconda è dedicata allo studio degli indici di potere. Ovverossia, al tentativo di valutare in qualche modo il "potere" dei vari membri degli organismi deliberanti.

La terza "immerge" la problematica dei giochi semplici dentro quella più grande della teoria delle scelte sociali. Oltre a menzionare vari aspetti problematici di questo contesto, viene anche presentata una versione del risultato di Gibbard e Satterthwaite (Gibbard (1973), Satterthwaite (1975)) sulla manipolabilità delle "funzioni di scelta sociale".

Una versione "interattiva" di questo materiale è disponibile in rete all'indirizzo internet:

http://antares.ima.ge.cnr.it/corsoIRRSAE/

Altro materiale e informazioni sulla Teoria dei Giochi sono disponibili in rete all'indirizzo internet:

http://www.dima.unige.it/STAFF/PATRONE/index.htm

Indice

Parte I

Giochi Semplici

1 Breve introduzione ai giochi cooperativi

Definiamo gioco cooperativo a utilità trasferibile o *TU-game* (*Transferable Utility game*) come segue:

Definizione 1.1 Un gioco cooperativo a utilità trasferibile a n persone è una coppia $G =< N, \nu >$ dove $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ è un insieme finito con n elementi e $\nu : \mathcal{P}(N) \to I\!R$ è una funzione a valori reali definita su tutti i sottoinsiemi di N e tale che $\nu(\emptyset) = 0$.

■

Gli elementi dell'insieme N rappresentano gli n *giocatori* del gioco $< N, \nu >$.
Un generico sottoinsieme S di N si chiama *coalizione*.
ν si chiama *funzione caratteristica* del gioco e $\nu(S)$ rappresenta la quantità di utilità che i membri di S possono ottenere coalizzandosi fra loro (le notazioni di gioco cooperativo a utilità trasferibile $< N, \nu >$ e (N, ν) saranno utilizzate nel seguito indifferentemente).

Definizione 1.2 [Superadditività] Il gioco $G =< N, v >$ si dice *superadditivo* se, $\forall S, T \in \mathcal{P}(N)$ (insieme delle parti di N) tali che $S \cap T = \emptyset$ si ha:
$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$

■

L'intepretazione è la seguente: se S e T sono coalizioni disgiunte, ne segue che, raggruppando le loro forze, esse possono ottenere almeno tanto quanto ottengono separatamente.
Nel caso dei giochi superadditivi è ragionevole aspettarsi che si formerà la cosiddetta "grande coalizione", cioè quella formata da tutti gli n giocatori, e il problema sarà come spartire l'utilità totale $\nu(N)$ tra tutti i giocatori. Ad ogni modo, almeno che non espressamente indicato di volta in volta, noi non assumeremo a priori che la condizione di superadditività sia soddisfatta dai giochi che considereremo.

Esempio 1.1 (Gioco dei pirati) *Tre pirati sono alla ricerca di un tesoro (il cui valore è t) e per raggiungerlo devono attraversare un fiume di larghezza d. Ognuno possiede una pertica di lunghezza $h = \frac{2}{3}d$. Per raggiungere il tesoro occorre quindi che si formi una coalizione di almeno due pirati. Posto $N = \{1, 2, 3\}$ l'insieme dei giocatori, la funzione caratteristica del gioco è chiaramente*[1]*:*
$v(1) = v(2) = v(3) = 0, v(1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = v(1, 2, 3) = t$

[1]Si noti che in questo esempio (e nel seguito) abbiamo usato notazioni SCORRETTE. Dovremmo scrivere $v(\{1\})$ invece di $v(1)$, $v(\{1, 2\})$ invece di $v(1, 2)$, ecc. Ma tutti fanno così perchè è così noioso scrivere tutte quelle parentesi graffe...

2 Coalizioni vincenti e perdenti

In Sociologia e nelle Scienze Politiche, i giochi cooperativi ad utilità trasferibile sono stati utilizzati per studiare svariati contesti decisionali che comprendono al loro interno uno scrutinio elettorale.
Si consideri un dato insieme N di n "giocatori": possono essere individui, città, partiti, azionisti, condomini.
Si immagini una regola la quale dice quale requisito debba soddisfare un gruppo di giocatori per essere in grado di far passare una decisione.
In questo contesto è naturale pensare ad un gioco in cui ogni gruppo è o vincente o perdente, nel senso che o ottiene di far passare la propria decisione o non ottiene di farla passare.
Per questo tipo di situazioni, la teoria ci fornisce un modello che è proprio di una data classe di giochi cooperativi: i *giochi semplici*.
L'idea è quella di costruire un gioco in cui ogni coalizione S è o vincente ($\nu(S) = 1$) o perdente ($\nu(S) = 0$), in altre parole la sua funzione caratteristica sia definita come $\nu : \mathcal{P}(N) \to \{0, 1\}$.
Possiamo allora dire:

Definizione 2.1 Un gioco si dice *semplice* se:

1. $\forall S \subseteq N$, si ha $\nu(S) = 0$ oppure $\nu(S) = 1$.
2. $\nu(N) = 1$.

■

L'interpretazione è che la coalizione S con valore 1 possa decidere sul problema sotto considerazione senza l'aiuto dei giocatori al di fuori di S. Per questo motivo, queste coalizioni sono chiamate *vincenti*. Si noti che nella definizione di gioco semplice, la coalizione N di tutti i giocatori è in grado di aggiudicarsi 1. Questo, nel contesto decisionale a cui ci si riferiva all'inizio di questo paragrafo, potrebbe essere interpretato come il fatto che il gruppo formato da tutti i giocatori riesce sempre a soddisfare il requisito per far passare la propria decisione.
In letteratura è possibile trovare definizioni diverse di gioco semplice. Per esempio, una molto diffusa è quella che definisce gioco semplice come gioco che soddisfi il solo requisito 1 della definizione 2.1, introducendo il requisito 2 nella definizione di un'ulteriore sottoclasse di giochi semplici, i *giochi di controllo*. Noi comunque indicheremo giochi semplici quelli definiti come in 2.1.
Senza nessuna ulteriore specificazione, è quindi anche possibile che, per esempio, se una coalizione $S \subseteq N$ è vincente, anche la sua complementare in N, cioè $N \setminus S$ sia a sua volta vincente (a questo proposito si veda il paragrafo 3).

Esercizio 2.1 *Descrivere un gioco semplice $G = (N, v)$, dove N è l'insieme degli n giocatori del gioco G, in cui una qualsiasi coalizione è vincente se possiede il* consenso unanime *di tutti i giocatori appartenenti ad un gruppo $U \subseteq N$, dove U è una coalizione fissata avente un numero di giocatori strettamente maggiore di* 1.

Dovrebbe essere chiara, a questo punto, la portata dei giochi semplici nello studio, soprattutto, delle scienze politiche. Ma se ancora non lo è si consideri la seguente particolare classe di giochi semplici: i *giochi di maggioranza pesata*.

Definizione 2.2 Sia $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ un vettore di componenti non negative e sia $q \in I\!R$ t.c.

$$0 < q < \sum_{i=1}^{n} p_i \tag{1}$$

Allora si definisce *gioco di maggioranza pesata* $[q; p_1, p_2, \ldots, p_n]$ il gioco semplice (N, v) definito da:

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{se } \sum_{i \in S} p_i \leq q \\ \\ 1 & \text{se } \sum_{i \in S} p_i > q \end{cases} \tag{2}$$

■

Un'interpretazione può essere la seguente: i giocatori sono n partiti politici aventi rispettivamente $p_1, p_2, \ldots, p_n$ seggi in parlamento e q il "quorum", cioè il numero minimo di voti necessario per approvare una legge.
Si noti nella definizione 2.2 il segno di maggiore stretto come criterio di attribuzione del valore 1 ad una coalizione generica S. Per quanto ragionevole (si pensi ad esempio alla frase "maggioranza della metà più uno"), tale criterio non è affatto scontato. Anzi, è molto facile in letteratura (si veda ad esempio il libro di Owen), trovare definizioni di giochi di maggioranza pesata con funzioni caratteristiche che prevedono valore zero per la coalizione la cui somma dei pesi è strettamente minore alla quota di maggioranza e valore pari a uno per la coalizione la cui somma dei pesi sia maggiore o uguale alla stessa quota. Cambia qualcosa? Ovviamente sì , dato che le due definizioni sono diverse. C'è però un'ulteriore aspetto interessante legato alle due diverse formulazioni di gioco di maggioranza: dato un gioco di maggioranza definito in uno dei due modi, è sempre possibile indicare una quota in grado di rappresentare lo stesso gioco secondo l'altra definizione? L'esempio seguente illustra in una specifica situazione il precedente interrogativo.

Esempio 2.1 *Sia $G =< \{1, 2, 3\}, v >$ un gioco di maggioranza secondo la definizione 2.2 con una struttura di pesi e quota pari a $[2; 1, 1, 1]$. Tale struttura determina la funzione caratteristica che assume i seguenti valori:*

$v(\emptyset) = 0; v(1) = 0; v(1,2) = 0; v(2) = 0; v(2,3) = 0; v(1,2,3) = 1; v(1,3) = 0; v(3) = 0$
La stessa struttura di pesi e la stessa quota, secondo la definizione alternativa, cioè quella che assegna il valore 1 ad una generica coalizione qualora venga raggiunta o superata la quota di maggioranza e il valore 0 qualora la stessa non venga raggiunta, determina invece un gioco la cui funzione caratteristica risulta $v(\emptyset) = 0; v(1) = 0; v(1,2) = 1; v(2) = 0; v(2,3) = 1; v(1,2,3) = 1; v(1,3) = 1; v(3) = 0$
I due giochi non sono gli stessi, ce lo aspettavamo. In questo secondo contesto, dove si guadagna 1 anche in corrispondenza del raggiungimento della quota $q = 2$, anche le coalizioni con due giocatori sono vincenti. È però interessante notare che in questa seconda tipologia di giochi di maggioranza, è possibile descrivere il gioco ottenuto in base alla definizione 2.2 semplicemente attribuendo il valore $2 + \delta$ alla quota di maggioranza, con $\delta \in (0, 1]$. Con tale quota infatti, a parità di pesi, in base alla definizione alternativa, si ottiene il gioco con $v(\emptyset) = 0; v(1) = 0; v(1,2) = 0; v(2) = 0; v(2,3) = 0; v(1,2,3) = 1; v(1,3) = 0; v(3) = 0$
che è esattamente il gioco di partenza, in cui la quota era pari a 2.

Quanto discende dal precedente esempio può essere generalizzato. Ossia: dato un gioco di maggioranza secondo la definizione 2.2, esiste sempre un gioco di maggioranza secondo la definizione alternativa equivalente al primo.

Proposizione 2.1 *Sia $G =< N, v >$ un gioco di maggioranza in base alla definizione 2.2 con pesi $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ e $q \in \mathbb{R}$.*
Sia inoltre $G^* =< N, w >$ un gioco di maggioranza in base alla definizione alternativa, cioè tale per cui

$$w(S) = \begin{cases} 0 & se \sum_{i \in S} p_i < q^* \\ \\ 1 & se \sum_{i \in S} p_i \geq q^* \end{cases}, \qquad q^* \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Allora $v(S) = w(S) \forall S \subseteq N \Leftrightarrow q^* = q + \epsilon$, con $\epsilon \in (0, m]$ dove
$m = \min \left\{ \left((\sum_{i \in S} p_i) - q \right) : S \subseteq N, \sum_{i \in S} p_i > q \right\}$.
Dim.
($\Rightarrow$.)
Evidentemente si avrà

$$\begin{cases} \sum_{i \in S} p_i \leq q \\ \sum_{i \in S} p_i < q^* = q + \epsilon \end{cases}, \qquad \forall S \subseteq N \qquad t.c. \qquad v(S) = w(S) = 0 \tag{4}$$

che è verificata per qualsiasi $\epsilon > 0$.
Inoltre dalle ipotesi si vede subito che

$$\begin{cases} \sum_{i \in S} p_i > q \\ \sum_{i \in S} p_i \geq q^* = q + \epsilon \end{cases}, \qquad \forall S \subseteq N \qquad t.c. \qquad v(S) = w(S) = 1 \tag{5}$$

poichè esiste sempre, per definizione di gioco semplice, almeno una coalizione vincente, segue immediatamente che $q + \epsilon \leq q + m$.
Quindi $0 < \epsilon \leq m$.
($\Leftarrow$.*)*
Per definizione di minimo, si ha

$$\sum_{i \in S} p_i \geq q + \epsilon, \qquad \epsilon \in (0, m] \qquad \forall S \subseteq N : w(S) = 1 \tag{6}$$

poichè $\epsilon > 0$*, si ha pure che*

$$\sum_{i \in S} p_i \geq q + \epsilon > q \tag{7}$$

e quindi rimane dimostrato che in entrambi i giochi sono vincenti le stesse coalizioni. Con ragionamenti analoghi si dimostra che le coalizioni il cui valore della funzione caratteristica è nullo sono le stesse in entrambi i giochi.
■

Parlando di quote di maggioranza, come già accennato, non possiamo fare a meno di considerare di parlare del "classico" quorum del 50%. Ci servirà, dato un insieme E finito, avere un simbolo per indicare il numero dei suoi elementi: useremo a tale fine il simbolo $|E|$. Quindi $|N|$ indica il numero complessivo dei giocatori.

Esempio 2.2 (Gioco di maggioranza pesata con quorum del 50%)
Si consideri un gioco $G = (N, v)$ *in cui*

$$v(S) = \begin{cases} 0 & |S| \leq \frac{|N|}{2} \\ \\ 1 & |S| > \frac{|N|}{2} \end{cases} \tag{8}$$

Evidentemente, nell'ottica di quanto visto sino ad ora, questo gioco potrebbe rappresentare la situazione in cui, in un gruppo di $|N|$ *giocatori, viene fatta passare la decisione presa a maggioranza semplice, e cioè con almeno la metà dei consensi. Ebbene questo gioco* $G = (N, v)$ *altro non è che un gioco a maggioranza pesata* $[\frac{|N|}{2}; \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{|N| \text{ volte}}]$.

Esercizio 2.2 *Il Regolamento della Camera dei Deputati in vigore dal primo maggio 1971 contiene i seguenti articoli:*
Art. 46

1. *Le deliberazioni dell'Assemblea e delle Commissioni in sede legislativa non sono valide se non è presente la maggioranza dei loro componenti.* ...

2. *I deputati che sono impegnati per incarico avuto dalla Camera, fuori della sua sede o, se membri del Governo, per ragioni del loro ufficio, sono computati come presenti per fissare il numero legale.*
   ...

Art. 48

1. *Le deliberazioni dell'Assemblea e delle Commissioni sono adottate a maggioranza dei presenti, salvo i casi per i quali è stabilita una maggioranza speciale.*
2. *Ai fini del comma 1 sono considerati presenti coloro che esprimono voto favorevole o contrario.*
   ...

Come potrebbe essere modellizzato il meccanismo di funzionamento della Camera, limitatamente a quanto descritto in questi stralci di articoli del regolamento, nei termini di un gioco semplice? Descrivere accuratamente le assunzioni e le semplificazioni che si ritengano opportune.

Un altro esempio analogo a quello del Parlamento potrebbe essere quello di un collegio elettorale formato dai rappresentanti di stati o regioni i cui rappresentanti siano eletti direttamente dai cittadini dei rispettivi stati o regioni. In ogni collegio elettorale, quindi, gli aventi diritto al voto partecipano ad un altro gioco a maggioranza pesata, con struttura diversa da quello che verrà poi giocato nel Consiglio ma che, se vogliamo, detterà gli elementi per quest'ultimo gioco.
Ancora una volta la teoria ci fornisce gli strumenti per studiare questa sorta di composizione di giochi di maggioranza pesata in un gioco "complessivo".

Definizione 2.3 Siano $M_1, M_2, \dots, M_n$, n insiemi disgiunti e non vuoti di giocatori. Siano inoltre $(M_1, w_1), (M_2, w_2), \dots, (M_n, w_n)$, n giochi semplici. Sia $(N, v), |N| = n$ un gioco su N con v funzione caratteristica non negativa. Allora la *v-composizione* di $(M_1, w_1), (M_2, w_2), \dots, (M_n, w_n)$ denotata da

$$u = v[w_1, w_2, \dots, w_n] \tag{9}$$

è il gioco con insieme dei giocatori dato da

$$M^* = \bigcup_{j=1}^{n} M_j \tag{10}$$

e funzione caratteristica

$$u(S) = v(\{j \mid w_j(S \cap M_j) = 1\}) \qquad \forall S \subseteq M^* \tag{11}$$

■

Esempio 2.3 (Il Collegio Elettorale) .
Sia $G = (N, v)$, *con* $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, *il gioco a maggioranza pesata* $[60; 40, 25, 21, 6, 5, 5]$.
I sei giocatori sono le regioni di uno stato che vengono rappresentate nel collegio con un numero di seggi pari a quelli indicati sopra. Il quorum per far approvare una legge è appunto 60.
Per ogni $j \in N$, M_j *consiste dei votanti nella* j*-esima regione;* w_j *è la funzione caratteristica del gioco di maggioranza pesata con quorum del 50% con insieme dei giocatori* M_j.
L'idea naturalmente è che $G' = (M^*, u)$ *sia un gioco semplice sull'insieme dei giocatori*

$$M^* = \bigcup_{j=1}^{6} M_j \tag{12}$$

che consiste nell'insieme di tutti i giocatori aventi diritto al voto nello stato costituito dalle sei regioni.
In quest'ultimo gioco una coalizione $S \subseteq M^*$ *è vincente se contiene un sottoinsieme della forma*

$$S' = \bigcup_{j \in T} S_j \tag{13}$$

dove $w_j(S_j) = 1 \forall j \in T$, *e* $v(T) = 1$. *Perciò una coalizione vince se ha almeno metà dei voti popolari* $[w_j(S_j) = 1]$ *in regioni che totalizzano almeno* 60 *voti elettorali* $[v(T) = 1]$. *In altre parole, tutto questo significa che se per esempio la metà più uno della popolazione della regione* 1 *insieme alla metà più uno della regione* 3 *si mettono d'accordo per far passare una o più leggi, ebbene ci riusciranno eleggendo i propri rappresentanti regionali, i quali avranno poi la maggioranza nel Collegio stesso.*

Esempio 2.4 (Consiglio di Sicurezza delle Nazioni Unite) .
Il Consiglio di Sicurezza delle Nazioni Unite consiste di cinque stati permanenti, il cui insieme indicheremo con M_1, *e dieci altri membri che costituiscono l'insieme* M_2.
Le mozioni devono essere approvate da nove membri, tra i quali devono essere inclusi tutti e cinque i membri permanenti.
È facile vedere che siamo in presenza di un gioco $G = (M^*, u)$, *con* M^* *insieme di tutti gli stati membri e in cui*

$$u = v[w_1, w_2] \tag{14}$$

dove:

1. M_1 è l'insieme degli stati permanenti del gioco $G_1 = (M_1, w_1)$ con

$$\forall S \subseteq M_1, w_1(S) = \begin{cases} 0 & \textit{se } S \neq M_1, \\ \\ 1 & \textit{se } S = M_1, \end{cases} \tag{15}$$

2. M_2 è l'insieme degli altri membri del gioco $G_2 = (M_2, w_2)$ con

$$\forall S \subseteq M_2, w_2(S) = \begin{cases} 0 & \textit{se } |S| \leq 3, \\ \\ 1 & \textit{se } |S| \geq 4, \end{cases} \tag{16}$$

3. v è data da

$$\begin{gathered} v(\{1\}) = v(\{2\}) = 0 \\ \\ v(\{1,2\}) = 1. \end{gathered} \tag{17}$$

Si noti che sebbene nel gioco $G_2 = (M_2, w_2)$ due coalizioni disgiunte possono risultare vincenti, nel gioco $G_v = (\{1,2\}, v)$ solo la coalizione $\{1,2\}$ è vincente. Ciò non toglie che in base all'equazione 11, le coalizioni vincenti del gioco $G = (M^*, u)$ sono $M_1 \cup \widetilde{S}$, con $\widetilde{S} \subseteq M_2$ e $|\widetilde{S}| \geq 4$.

Esercizio 2.3 *Si descriva il gioco del Consiglio di Sicurezza ONU nei termini di un gioco di maggioranza pesata.*
Suggerim.
Provare ad impostare le condizioni sui pesi e sulla quota di maggioranza che devono essere soddisfatte contemporaneamente per rispecchiare il processo elettorale impiegato al Consiglio dell'ONU. Per esempio il gioco di maggioranza pesata $< \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}, v >$ con la quota e la struttura di pesi definita come
$[38; 7,7,7,7,7,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]$ *rispecchia tale meccanismo? Se sì, è l'unica che lo rispecchia?* ■

I giochi di maggioranza pesata sono giochi semplici. D'altra parte non è vero che ogni gioco semplice sia un gioco di maggioranza pesata, come mostra l'esempio seguente:

Esempio 2.5 *Si consideri una ipotetica commissione parlamentare formata da tre senatori $\{x, y, z\}$ e tre deputati $\{a, b, c\}$. Se per l'approvazione di una certa mozione occorre il consenso di almeno due senatori e di almeno due deputati, non c'è modo di trovare una struttura di pesi per ciascun giocatore* *e una quota in grado di rappresentare il suddetto gioco. Infatti devono essere soddisfatte contemporaneamente*

$$\begin{cases} p_x + p_y + p_a + p_b > q \\ p_x + p_z + p_a + p_c > q \\ p_z + p_y + p_c + p_b > q \\ p_x + p_z + p_y + p_a \leq q \\ p_x + p_z + p_y + p_b \leq q \\ p_x + p_z + p_y + p_c \leq q \\ p_a + p_b + p_c + p_x \leq q \\ p_a + p_b + p_c + p_y \leq q \\ p_a + p_b + p_c + p_z \leq q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2p_x + 2p_y + 2p_z + 2p_a + 2p_b + 2p_c > 3q \\ 4p_x + 4p_y + 4p_z + 4p_a + 4p_b + 4p_c \leq 6q \end{cases} \tag{18}$$

che è evidentemente impossibile da soddisfare.

L'esempio sul Consiglio dell'ONU ci permette di introdurre un altro concetto connesso ai giochi semplici, quello di *giocatore di veto*.
Gli stati permanenti del Consiglio di Sicurezza hanno infatti la possibilità di porre il loro veto alle scelte decisionali del Consiglio stesso. Questa proprietà nei termini formali della teoria si traduce nella seguente definizione:

Definizione 2.4 Sia $G = (N, v)$ un gioco semplice. Definiamo $i \in N$ un giocatore di veto nel gioco G se per ogni $S \subseteq N$

$$i \notin S \Rightarrow v(S) = 0 \tag{19}$$

■

Abbiamo sin qui visto alcuni metodi formali di modellizzazione di particolari situazioni decisionali esclusivamente dal punto di vista della formazione delle coalizioni, senza indagare gli ulteriori aspetti esistenti al loro interno.
Non bisogna dimenticare che le coalizioni, anche se vincenti, sono formate da singoli giocatori che, per convenienza, sono liberi di abbandonare la coalizione per entrare a far parte di un'altra.
La convenienza, ovviamente, potrebbe stare nel fatto che entrando in un'altra coalizione essi, come singoli, ci guadagnano di più. *Ma ci guadagnano che cosa?* Per rispondere a questa domanda bisogna fare un passo indietro. Eravamo rimasti agli strumenti che la teoria ci fornisce per descrivere quali coalizioni sono vincenti e quali perdenti. Non è però a mio avviso difficile immaginare situazioni in cui (si vedano per esempio i partiti in parlamento) i giocatori decidano di coalizzarsi in gruppi più o meno vincenti purchè venga loro assegnata una quota di merito, o se si vuole di rilevanza o ancor meglio di potere decisionale all'interno della coalizione che si sta formando, che essi ritengano ripaghi la loro entrata nella coalizione stessa.

Per esempio, l'essere giocatore di veto o, per continuare nei termini dei contesti decisionali portati come esempi, avere la capacità di porre il veto ad una decisione sostenuta da una certa coalizione, potrebbe far ragionevolmente credere a tale giocatore di avere diritto a più potere decisionale degli altri all'interno della coalizione.
Questo tipo di considerazioni aprono la strada verso quello che può essere considerato il problema fondamentale dell'analisi dei *TU-games*: come "spartire i guadagni" tra i giocatori. Come vedremo, non c'è una indicazione univoca, o una regola "incontestabile". La teoria non dice quale "deve essere" la soluzione, bensì analizza le proprietà delle diverse possibili soluzioni, mettendo in evidenza sia gli aspetti "positivi" che quelli "negativi". Come di consueto, per esprimere più agevolmente e con maggiore precisione i concetti che ci interessano, avremo bisogno di un linguaggio appropriato. Introduciamo quindi la terminologia essenziale.

Definizione 2.5 Sia $G = (N, v)$ un TU-game. Un elemento $x \in \mathbb{R}^n$ si dice allocazione (per G). Se $\sum_{i=1}^n x_i = v(N)$ l'allocazione x si dice pre-imputazione.
Una pre-imputazione che soddisfa anche la condizione $x_i \geq v(\{i\}) \forall i \in N$ è detta *imputazione*. Chiameremo $I(v)$ l'insieme delle imputazioni per il gioco G.

■

L'interpretazione di una pre-imputazione è ovvia: si tratta di una ripartizione di $v(N)$ tra i giocatori. Ovviamente, il concetto di pre-imputazione è particolarmente interessante per i giochi superadditivi: è per questa classe di giochi che è ragionevole immaginare che si formi la grande coalizione N e che quindi una "soluzione" debba consistere nello scegliere una (o più di una) possibile ripartizione di $v(N)$.
Si noti che la condizione $\sum_{i=1}^n x_i = v(N)$ può essere "letta" come esprimente due condizioni contemporaneamente: $\sum_{i=1}^n x_i \leq v(N)$ (che è riconducibile a una condizione di fattibilità) e $\sum_{i=1}^n x_i \geq v(N)$ (che rappresenta invece una condizione di efficienza). Quest'ultima condizione viene anche indicata come condizione di "razionalità collettiva".

Da questo punto di vista, la condizione $x_i \geq v(\{i\})$ è interpretabile come condizione di "razionalità individuale" per il giocatore i.
L'idea euristica, sempre legata ai nostri esempi, è quella di credere plausibile che ciascun giocatore, anche se non di veto, non sarà mai d'accordo ad entrare a far parte di una coalizione per quanto vincente ($v(S) = 1$) se la quota di potere decisionale assegnatagli all'interno della coalizione è inferiore a quella che egli è in grado di garantirsi da solo (razionalità individuale).

D'altro canto sarà almeno altrettanto difficile che nel complesso i giocatori si possano arrogare più diritto decisionale di quanto il gioco stesso ne attribuisca alla coalizione (in questo caso 1 se vincente e 0 se perdente).

Ma sono poi veramente ragionevoli queste considerazioni? (si veda la parte seconda sugli indici di potere).

Esercizio 2.4 *Trovare, se esiste, un gioco semplice il cui insieme di imputazioni è vuoto.*

Esempio 2.6 *Si consideri una Società con quattro azionisti,* $N = \{1, 2, 3, 4\}$*, che si dividono l'intero stock azionario nelle percentuali del* $10, 20, 30$ *e* 40 *per cento rispettivamente.*
Si assuma che ogni decisione possa essere approvata dal consiglio degli azionisti solo se in possesso della maggioranza semplice (quorum del 50%*) delle quote azionarie.*
Questo gioco può essere trattato come un gioco semplice a quattro giocatori nel quale le coalizioni vincenti sono:
$\{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$ *e* $\{1, 2, 3, 4\}$.
Una delle imputazioni di questo gioco potrebbe essere quella che assegna a ciascun giocatore la rispettiva componente del "vettore dei voti", cioè quel vettore che assegna a ciascun giocatore la frazione di voti che egli è in grado di pronunciare normalizzata a 1, ovvero $(\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{2}{5})$.
Si noti tuttavia che la maggior quota attribuita al giocatore 3 rispetto a quella attribuita al giocatore 2 in conformità al maggior numero di azioni in possesso dell'uno rispetto all'altro, non ha poi così tanta ragione di essere: i due giocatori hanno in realtà lo stesso numero di opportunità di formare una coalizione vincente (cinque a cinque). Quindi il giocatore 2 avrebbe elementi sufficienti per sostenere che l'imputazione precedente lo penalizzi oltremodo.

L'esempio precedente mostra come l'idea di razionalità collettiva e di razionalità individuale legata al concetto di imputazione, per quanto ragionevole, non sia ancora abbastanza per garantire una certa "stabilità" delle allocazioni.
Non occorre molta fantasia per pensare anche a condizioni di razionalità "intermedia", che sono date evidentemente da condizioni del tipo: $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$, dove S è una generica "coalizione". Questa idea elementare ci porta immediatamente ad uno dei concetti chiave di "soluzione" per un generico gioco TU, e quindi anche per un gioco semplice: è l'idea di nucleo.

Definizione 2.6 Sia (N, v) un gioco TU. Indichiamo con $C(v)$ il nucleo del gioco, dove: $C(v) = \{x \in I(v) : \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \forall S \subseteq N\}$

■

Come è evidente dalla definizione e dalla discussione precedente, si ha: $C(v) \subseteq I(v)$.
Talvolta, pur essendo $I(v) \neq \emptyset$, si può avere che $C(v) = \emptyset$.

Esempio 2.7 Sia $N = \{1, 2, 3\}$ e $v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$, mentre $v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = v(\{1, 2, 3\}) = 1$ (si noti che questo gioco è il "gioco dei pirati" delle esempio 1.1 per $t = 1$).
Evidentemente questo gioco ha $I(v) \neq \emptyset$.
Se vogliamo che $x \in I\!R^3$ stia anche in $C(v)$ deve essere:
$x_1 + x_2 \geq v(\{1, 2\}) = 1$
$x_1 + x_3 \geq v(\{1, 3\}) = 1$
$x_2 + x_3 \geq v(\{2, 3\}) = 1$
Sommando membro a membro si ottiene: $2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 3$, cioè $x_1 + x_2 + x_3 \geq 3/2$. Ma questo è evidentemente incompatibile con la condizione $x_1+x_2+x_3 = v(N) = 1$. In termini intuitivi, ciò che accade è che le coalizioni "intermedie" sono troppo forti relativamente alla grande coalizione.

Può quindi essere interessante andare a cercare le condizioni per le quali, dato un gioco semplice, il suo nucleo è non vuoto. A questo proposito può essere utile il seguente teorema:

Teorema 2.1 *Dato un gioco semplice $G = (N, v)$, il suo nucleo $C(v)$ è non vuoto se e solo se c'è almeno un giocatore di veto.*
Dim.
($\Rightarrow$.)
Si supponga che v non abbia giocatori di veto. Allora, per ogni $i \in N$, esiste una coalizione $S \subset N$ tale che $i \notin S$ e $v(S) = 1$. Per un'imputazione x che sta nel nucleo, abbiamo che:

$$\sum_{j \in N} x_j = v(N) = 1, \tag{20}$$

$$\sum_{j \neq i} x_j \geq \sum_{j \in S} x_j \geq v(S) = 1, \tag{21}$$

Quindi $x_i = 0$ per ogni i che appartiene a N, e perciò x non può essere un'imputazione. Questa contraddizione prova che $C(v) = \emptyset$.
($\Leftarrow$.)
Si supponga ora che v abbia almeno un giocatore di veto. Sia S l'insieme di tali giocatori di veto ($|S| \geq 1$). Sia x un'allocazione tale che

$$\begin{array}{ll} \sum_{i \in S} x_i = 1, & \\ x_i \geq 0 & \textit{per ogni } i \in S \ , \\ x_i = 0 & \textit{per } i \notin S \end{array} \tag{22}$$

Ora, se T è una coalizione vincente, dobbiamo avere $S \subseteq T$ e poichè la somma delle componenti dell'allocazione in S deve essere pari ad 1 si ottiene

$$\sum_{i \in T} x_i \geq \sum_{i \in S} x_i = 1 = v(T), \tag{23}$$

il che significa che x rispetta la razionalità intermedia per ogni $T \subset N$ oltre che quella individuale e collettiva. Quindi $x \in C(v)$. ■

Esercizio 2.5 *Perchè $\sum_{j \neq i} x_j \geq \sum_{j \in S} x_j$ nella 21?*

3 Appendice ai giochi semplici

Nel paragrafo precedente abbiamo definito la classe dei giochi semplici come quella classe di giochi cooperativi a utilità trasferibile la cui funzione caratteristica può assumere valori esclusivamente in $\{0, 1\}$, con l'ulteriore particolarità che $v(N) = 1$. Nulla di più è stato richiesto nella definizione di gioco semplice. Non si poteva quindi escludere la possibilità di avere giochi semplici in cui ci fossero più coalizioni disgiunte vincenti (e quindi anche che se una coalizione S fosse vincente, la sua complementare in N, cioè $N \setminus S$ fosse pure vincente), o che una coalizione T fosse perdente sebbene contenesse al suo interno una coalizione vincente, o ancora che l'unione di due coalizioni vincenti disgiunte desse origine a una coalizione perdente.
È evidente come queste particolari situazioni possano essere quantomeno difficili da giustificare nell'interpretazione dei giochi semplici come regole per prendere decisioni in contesti di scelta collettiva, come quelli presi ad esempio nel paragrafo precedente (Parlamento, consigli di amministrazioni ecc.).
Può quindi essere utile andare a presentare alcune proprietà che possono essere richieste in aggiunta al gioco semplice allo scopo di catturare meccanismi particolari come quelli a cui si è appena accennato. Per ogni coppia di numeri reali a e b denotiamo $a \wedge b = min\{a, b\}$ e $a \vee b = max\{a, b\}$.

Definizione 3.1 Un gioco semplice $< N, v > \in \mathcal{SG}^N$:

1. è *monotono* se $S \subseteq T \Rightarrow v(S) \leq v(T)$, con $S, T \subseteq N$;
2. è *N-proprio* se $v(S) \wedge v(N \setminus S) = 0$ per tutte le coalizioni $S \subseteq N$;
3. è *proprio* se $v(S) \wedge v(T) = 0$ per tutte le coalizioni disgiunte $S, T \subseteq N$;
4. è *fortemente proprio* se $v(S) \wedge v(T) \leq v(S \cap T)$ per tutte le coalizioni disgiunte $S, T \subseteq N$;
5. è *decisivo* se $v(S) \vee v(N \setminus S) = 1$ per tutte le coalizioni $S \subseteq N$.

■

L'interpretazione è la seguente: la monotonia significa che il gioco semplice

è tale per cui una coalizione che contiene al suo interno una coalizione vincente sia anch'essa vincente. Un gioco semplice *N-proprio*, invece è tale per cui, data una coalizione S vincente, la sua complementare $N \setminus S$ è sempre perdente. Questa proprietà non impedisce invece che esista una partizione di N su due coalizioni entrambe perdenti. Nemmeno per un gioco *proprio* si può escludere che due coalizioni complementari siano entrambe perdenti. Per tale gioco però non esistono più coalizioni disgiunte entrambe vincenti, anche se la loro unione non è N. Quindi, dal momento che S e $N \setminus S$ sono sempre coalizioni disgiunte, un gioco *proprio* è anche *N-proprio*.
Non è valido invece il contrario: affinchè un gioco semplice *N-proprio* sia anche *proprio*, il gioco deve essere anche monotono. Infatti se un gioco semplice è *N-proprio*, allora per ogni coalizione vincente $S \subset N$, $S \setminus N$ è perdente. Se il gioco è monotono, ogni coalizione contenuta in $N \setminus S$ è perdente. Poichè tali coalizioni sono ancora disgiunte da S (tranne che per l'insieme vuoto, ma non è questo il caso che ci interessa), questo significa che la condizione di gioco semplice *proprio* è verificata per ogni coppia di coalizioni disgiunte.
Un gioco semplice *fortemente proprio* è invece tale per cui se due coalizioni sono entrambe vincenti allora la loro intersezione deve essere vincente. Se invece due coalizioni sono disgiunte tra loro, e quindi la loro intersezione è vuota, allora almeno una delle due coalizioni deve essere perdente. Se ne deduce che un gioco *fortemente proprio* è anche *proprio*.
Un'altra proprietà che può essere richiesta a un gioco semplice è che sia anche *decisivo*. Tale proprietà sta a significare che date due coalizioni complementari S e $N \setminus S$, almeno una delle due è vincente. In altri termini, se S è perdente, $N \setminus S$ è vincente.

Esercizio 3.1 *Un gioco di maggioranza pesata è* monotono*,* N-proprio*,* proprio*,* fortemente proprio*,* decisivo*? Se non gode di una o più tra queste proprietà, si provi ad indicare condizioni aggiuntive che le garantiscano. Se possibile, trovare condizioni necessarie e sufficienti.*

Abbiamo mostrato alcune delle relazioni più semplici che legano le proprietà definite in 3.1. Ci sono altri legami tra le proprietà in essa elencate. Ricordiamo che un gioco $< N, v > \in \mathcal{G}^N$ è superadditivo se $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ per tutti gli insiemi disgiunti $S, T \subseteq N$.

Proposizione 3.1 *Sia $< N, v > \in \mathcal{SG}^N$ un gioco semplice. Allora $< N, v >$ è superadditivo $\Leftrightarrow < N, v >$ è* N-proprio *e monotono*

Dim.
($\Rightarrow$.)
Sia $< N, v >$ un gioco semplice superadditivo. Dal momento che v è non negativo (cioè $v(S) \geq 0$ per tutti gli $S \subseteq N$), abbiamo $v(S) \geq v(T) + v(T \setminus S) \geq v(T)$ per ogni $T \subseteq S \subseteq N$. Quindi $< N, v >$ è monotono.

Inoltre $1 \geq v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ per ogni S e $T \subseteq N$, così che al più uno tra $v(S)$ e $v(T)$ può essere uguale ad 1. Questo significa che $v(S) \wedge v(T) = 0$. Quindi $< N, v >$ è *proprio* e di conseguenza anche *N-proprio*.
$(\Leftarrow .)$
Si supponga $< N, v >$ monotono ed *N-proprio*. Allora tale gioco è pure *proprio*, e quindi, per ogni coppia di coalizioni disgiunte $S, T \subseteq N$, abbiamo $0 = v(S) \wedge v(T)$. Quindi almeno uno tra $v(S)$ e $v(T)$ è uguale a zero, per cui, $v(S \cup T) \geq v(S) \vee v(T)$; ma d'altra parte risulta anche $v(S) \vee v(T) = v(S) + v(T)$ e quindi $< N, v >$ è superadditivo. ■

Di seguito forniamo un altro risultato analogo al precedente. Ma prima definiamo una classe particolare di giochi semplici, detti *giochi di unanimità* (si osservi che la seguente definizione risolve l'esercizio 2.1):

Definizione 3.2 Un gioco semplice $< N, v_U >$ è detto di *unanimità* se esiste $U \subseteq N$ tale che per ogni $S \subseteq N$

$$v_U(S) = \begin{cases} 1 & \text{se } U \subseteq S, \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{24}$$

■

Inoltre definiamo un gioco convesso come segue:

Definizione 3.3 Un gioco $< N, v > \in \mathcal{G}^N$ è *convesso* se $v(S \cap T) + v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ per tutte le coalizioni $S, T \subset N$.

■

La condizione di convessità si può esprimere in maniera equivalente nella forma:

$$v(S \cup T) - v(S) \geq v(T) - v(S \cap T) \qquad \forall S, T \subset N. \tag{25}$$

Posto $C = (S \cup T) \setminus S$, il primo membro della disuguaglianza rappresenta il "contributo marginale" di C ad S, cioè $v(S \cup C) - v(S)$ (si vedano le dispense sugli indici di potere per un maggior approfondimento sul significato di contributo marginale), e il secondo membro rappresenta il contributo marginale di C a $S \cap T$. Quindi la convessità del gioco si può anche enunciare come segue: il contributo marginale di una coalizione C ad un'altra coalizione S disgiunta da C non diminuisce ingrandendo S.
Si noti che un gioco convesso è anche superadditivo. Esempi di giochi convessi sono i giochi di unanimità (si provi per esercizio). In effetti i giochi di unanimià sono gli unici giochi semplici convessi, come mostra il seguente teorema, il quale mostra alcuni ulteriori legami tra le proprietà viste sin qui.

Proposizione 3.2 *Le seguenti tre asserzioni sono equivalenti per un gioco semplice* $< N, v > \in \mathcal{SG}^N$*:*

1. $< N, v >$ *è convesso.*

2. $< N, v >$ *è monotono e fortemente proprio.*

3. $< N, v >$ *è un gioco di unanimità.*

Dim.
$(1 \Rightarrow 2)$
Un gioco convesso è anche superadditivo, e un gioco semplice superadditivo non negativo è monotono, come dimostrato nella proposizione 3.1.
Per mostrare che $< N, v >$ è *fortemente proprio*, si consideri $S, T \subseteq N$: la disuguaglianza $v(S) \wedge v(T) \leq v(S \cap T)$ può non essere soddisfatta soltanto se $v(S) = v(T) = 1$. Ma allora, dalla convessità, si otterrebbe, $v(S \cap T) + v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) = 2$ e, dal momento che tutti i termini possono essere soltanto uguali a 0 o 1, entrambi i termini sulla sinistra devono essere uguali ad 1, in particolare $v(S \cap T) = 1 \geq v(S) \wedge v(T)$, e quindi $< N, v >$ è *fortemente proprio*.
$(2 \Rightarrow 3)$
Sia$< N, v >$ un gioco semplice *fortemente proprio*.Denotiamo l'insieme $W(v) = \{S \subseteq N : v(S) = 1\}$ e l'insieme $veto(v) = \bigcap_{S \in W(v)}$. Siano $S, T \in W(v)$. Allora $v(S \cap T) \geq v(S) \wedge v(T) = 1$, quindi $S \cap T \in W(v)$. Poichè questa proprietà è valida per qualsiasi coppia di coalizioni vincenti, se l'intersezione di un numero p di insiemi in $W(v)$ è vincente, l'intersezione di questa con una coalizione F appartenente a $W(v)$ tra quelle non già nelle precedenti p coalizioni sarà ancora vincente e, per la proprietà associativa dell'intersezione, sarà uguale all'intersezione dei p insiemi precedenti con la coalizione F. Poichè $W(v)$ è un insieme finito, la coalizioni $veto(v)$ sarà una coalizione vincente e poichè la coalizione vuota è perdente, $veto(v) \neq \emptyset$.
Dalla monotonicità si deduce che ogni coalizione S contenente $veto(v)$ è vincente. Per definizione, ogni coalizione vincente contiene $veto(v)$ e quindi $< N, v >$ è un gioco di unanimità tale per cui $v = u_{veto(v)}$.
$(3 \Rightarrow 1)$
Ogni gioco di unanimità è convesso (si provi come esercizio). ■

Parte II
Indici di Potere

4 Introduzione

Come osservato nel capitolo relativo ai giochi semplici, un punto fondamentale dell'analisi condotta con gli strumenti della teoria dei giochi cooperativi è quello di indicare dei criteri su come spartire il potere all'interno delle coalizioni vincenti. Avevamo sottolineato come il nucleo indicasse delle allocazioni di "potere" che rispettassero ragionevoli principi di efficienza (individuale, intermedia e collettiva).
Vogliamo andare avanti in questa direzione e cercare allocazioni che rispettino altri e/o ulteriori principi. Tali principi saranno formulati sottoforma di assiomi e di volta in volta andremo a cercare quelle spartizioni che li rispettino.
Ma prima di illustrare alcuni esempi di questo genere, rendiamoci consapevoli di quello che stiamo facendo.
Sin dalle discussioni sul nucleo abbiamo cercato di far passare l'idea di quote di potere decisionale assegnate agli individui delle coalizioni proporzionalmente al ruolo sostenuto dagli stessi individui nel raggiungimento del risultato ottenuto dalla coalizione.
Ed è proprio a questo che servono *gli indici di potere*: un indice di potere è una funzione Ψ che associa ad ogni gioco semplice $< N, v >$ un vettore $\Psi(v) = (\Psi_1(v), \ldots, \Psi_n(v))$ la cui i -esima componente è interpretata come una misura della influenza che il giocatore i può esercitare sull'esito.
Il significato degli indici di potere, quindi, non è l'indicazione di una spartizione del guadagno ottenuto dalla coalizione, ma una misura del potere dei singoli giocatori.
Questa differenza è sostanziale e determina tutta una serie di considerazioni sugli assiomi che caratterizzano di volta in volta i diversi indici di potere. Tali considerazioni sono utili, a nostro avviso, ad evidenziare quali siano i ragionamenti che stanno alla base della scelta degli assiomi.
Per esempio, parlando di imputazioni, si era introdotta la condizione

$$\sum_{i=1}^{n} \Psi_i(v) = v(N) \tag{26}$$

come espressione di efficienza collettiva e fattibilità al tempo stesso (per brevità chiameremo d'ora in poi la condizione (26) di *efficienza*). Ebbene, questa stessa condizione la ritroveremo anche tra gli assiomi che caratterizzeranno alcuni degli indici di potere che analizzeremo.
La proprietà di efficienza può essere sensata in relazione a indici di potere di giochi in cui è verosimile che si formi la grande coalizione. Sarebbe in-

fatti difficile sostenere una misura di potere dei giocatori vincolata al valore ottenuto dalla grande coalizione qualora ci si sapetti che, data la struttura del gioco, questa non si formerà. Abbiamo osservato nel capitolo sui giochi semplici come per i giochi superadditivi sia plausibile che tutti i giocatori si coalizzino insieme. Potrebbe quindi sembrare ragionevole restringere il campo di analisi a quei giochi che sono superadditivi, almeno quando si richieda che sia soddisfatta la condizione di efficienza. Tuttavia, come vedremo nel seguito, l'efficienza non è una proprietà di cui non si possa fare a meno. Inoltre, in alcuni casi, anche in giochi non superadditivi potrebbe essere ragionevole ritenere che i giocatori formino la grande coalizione (si provi ad immaginarne alcuni). Date queste premesse, in aggiunta alla generalità dei risultati che mostreremo e per coerenza con quanto scritto nel capitolo sui giochi semplici in cui non facevamo alcuna ipotesi a priori di superadditività, lasciamo al lettore la considerazione di ritenere ragionevole o meno che in un gioco la grande coalizione si formi oppure no.

Richiederemo cioè che, per ogni gioco cooperativo ad utilità trasferibile, sia verificata la condizione (26). Se $v(n)$ può essere interpretata come una torta da distribuire tra i giocatori, questa condizione è davvero naturale (si vedano le considerazioni sulla fattibilità e sull'efficienza).

Ma se il contesto in cui ci si muove è quello dei giochi semplici interpretati come processi di scelta decisionale (come quelli considerati nel capitolo sui giochi semplici) non c'è nessuna torta di taglia pari a 1 da dividere. Il fatto che $v(N) = 1$ significa soltanto che N, la coalizione formata da tutti i giocatori, può far sì che passi una certa decisione, come qualsiasi altra coalizione vincente può fare.

Quindi una giustificazione della efficienza sulla base dei criteri illustrati a proposito del nucleo, in questo contesto non ha senso: il punto è misurare il potere, non distribuirlo.

Richiedere che la somma delle componenti di un indice di potere sia uguale a 1 non può nemmeno essere considerato come una semplice normalizzazione. Naturalmente è una normalizzazione per un dato gioco. In questo caso richiedere che questa somma sia uguale ad uno (o a cento se uno preferisce parlare in termini di percentuale) è innocuo nei limiti di comparazioni coinvolgenti giocatori all'interno del dato gioco.

Solitamente, però, gli indici di potere sono utilizzati per comparare giochi differenti e sono assiomaticamente fondati su assunzioni che coinvolgono il potere in giochi differenti. Da questo discende immediatamente la necessità che la somma delle componenti dell'indice di potere sia identico in tutti i giochi appartenenti a classi di giochi su differenti insiemi di giocatori $\mathcal{C}^N \subseteq \mathcal{G}^N$ e $\mathcal{C}^M \subseteq \mathcal{G}^M$, dove $\mathcal{G}^N$ e $\mathcal{G}^M$ sono gli insiemi dei giochi cooperativi ad utilità trasferibile aventi rispettivamente come insieme dei giocatori N

ed M. In formula (posto $n = |N|$ e $m = |M|$)

$$\sum_{i=1}^{n} \Psi_i(v) = \sum_{i=1}^{m} \Psi_i(w) \quad \forall < N, v > \in \mathcal{C}^N, \forall < M, w > \in \mathcal{C}^M. \qquad (27)$$

Ed è proprio questo ciò che la condizione di efficienza fa. Si noti che la condizione di efficienza soddisfa l'uguaglianza nella (27) per tutti i giochi $< N, v >, < M, w >$ qualunque sia il numero dei giocatori in N e in M. Quindi indicare la condizione di efficienza come "normalizzazione" non sarebbe corretto: l'idea di normalizzazione non si adatta alla interpretazione che è stata fatta, e ancora di meno alla sua giustificazione.
Questa non è l'unica giustificazione della condizione di efficienza. Ne esiste almeno un'altra che è legata ad una differente interpretazione degli indici di potere.
Gli indici di potere possono essere interpretati come misure o valutazioni a priori della probabilità di giocare un "ruolo rilevante" in un processo collettivo di scelta decisionale che segue un dato insieme di regole.
In questo contesto, si consideri una data coalizione S vincente in un gioco semplice $< N, v >$: il giocatore i in S è considerato giocare un ruolo rilevante se il suo voto è necessario per far passare il suo esito preferito il che significa che i è in grado con il proprio ritiro da S, di far diventare perdente la coalizione $S \setminus \{i\}$.
Data quindi una distribuzione di probabilità $p_i(S)$ che denota la probabilità della coalizione $S \subseteq N$ di formarsi riconoscendo al giocatore i il ruolo rilevante, un indice di potere potrebbe essere dato così :

$$\Psi_i(v) = \sum_{S \subseteq N, S \ni i} p_i(S)(v(S) - v(S \setminus \{i\})) \qquad (28)$$

Da questa base comune, lo vedremo dopo, differenti indici di potere emergono da differenti modelli probabilistici sulla formazione delle coalizioni.
È quindi ovvia la risposta al quesito su quale sia il significato della condizione di efficienza quando gli indici di potere sono interpretati come probabilità di giocare un ruolo rilevante: il fatto stesso di essere una distribuzione di probabilità e, pertanto, di rispettare la condizione che la somma delle probabilità deve dare 1.

Tutte queste osservazioni erano volte ad evidenziare che tipo di considerazioni vengono fatte per giustificare la ragionevolezza degli assiomi che caratterizzano gli indici di potere.Vediamo ora qualcuno di questi indici con la relativa caratterizzazione assiomatica.

5 L'indice di Shapley

Il nucleo di un gioco dà conto della forza dei vari giocatori (espressa attraverso $v(S)$). Tuttavia il nucleo può avere alcuni problemi. Per esempio,

lo abbiamo visto nel capitolo sui giochi semplici, il nucleo può essere vuoto. A questi problema se ne può aggiunge almeno un altro: il nucleo di un gioco (se non vuoto) contiene in genere più di una allocazione. Quindi, il nucleo non ci offre "la" soluzione, bensì solo un modo per scartare, per così dire, allocazioni che sarebbero instabili (se $\sum_{i \in S} x_i < v(S)$, la coalizione S ha interesse a "defezionare" dalla grande coalizione N, se si insiste sulla ripartizione $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$).
Vi è un altro concetto di soluzione che viene incontro a questo tipo di obiezioni (ma "ovviamente" gliene potremo fare altre, di altro genere...): si tratta del cosiddetto "valore Shapley" o, indifferentemente, "indice di Shapley".
Come già anticipato, procederemo in questo paragrafo ad illustrare gli assiomi che questo indice soddisfa e ne indicheremo un metodo per calcolarlo.
Data una classe di giochi $\mathcal{C}^N \subseteq \mathcal{G}^N$, dove $\mathcal{G}^N$ è l'insieme di tutti i giochi cooperativi ad utilità trasferibile aventi come insieme dei giocatori N, si definiscono i seguenti

Assioma 5.1 (efficienza) .
Un indice di potere $\psi(v)$ è efficiente *se $\sum_{i \in N} \psi_i(v) = v(N)$ per ogni gioco $< N, v > \in \mathcal{C}^N$.*

La discussione di questo assioma è rimandata alla parte introduttiva di questo capitolo.

Assioma 5.2 (anonimità) .
Un indice di potere $\psi(v)$ è anonimo *se per ogni gioco $< N, v > \in \mathcal{C}^N$ e per ogni permutazione σ di N tale che $< N, \sigma v > \in \mathcal{C}^N$,*

$$\psi_{\sigma(i)}(v) = \psi_i(\sigma v) \qquad \forall i \in N, \tag{29}$$

dove il gioco $< N, \sigma v >$ è definito da

$$\sigma v(S) = v(\sigma(S)) \qquad \forall S \subseteq N. \tag{30}$$

Il significato dell'assioma di anonimità è il seguente: quanto viene dato ad un giocatore non deve dipendere da "chi è" questo giocatore (cioè, se si tratta di Marco o Enrico), ma solo da quanto il giocatore è in grado di ottenere da solo o con altri.
Vediamo un esempio.

Esempio 5.1 Abbiamo tre giocatori che per semplicità chiameremo 1, 2, 3. Si ha :$v(1) = v(2) = v(3) = v(1,2) = v(1,3) = 0$; $v(2,3) = v(1,2,3) = 1$
Consideriamo ora un altro gioco, w, che assegna agli stessi giocatori (e alle loro coalizioni) i seguenti valori: $w(1) = w(2) = w(3) = w(2,3) = w(1,3) = 0$; $w(1,2) = w(1,2,3) = 1$. Che differenza c'è tra il gioco $< N, v >$ e quello $< N, w >$? Che in $< N, w >$ il giocatore 3 si trova nella identica situazione in

cui il giocatore 1 si trovava nel gioco $< N, v >$. L'idea di anonimità richiede che noi diamo al giocatore 3, nel gioco $< N, w >$, esattamente quello che diamo al giocatore 1 nel gioco $< N, v >$.

Esempio 5.2 Sia $N = \{1, 2, 3\}$. Prendiamo $\sigma : N \to N$ così definita: $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 2$, $\sigma(3) = 1$. Se $S = \{1, 2\}$, abbiamo che $\sigma(S) = \{\sigma(1), \sigma(2)\} = \{3, 2\} = \{2, 3\}$. Quindi, $\sigma v(1, 2) = v(2, 3)$. Se prendiamo $T = \{2, 3\}$, abbiamo che $\sigma(T) = \{\sigma(2), \sigma(3)\} = \{2, 1\} = \{1, 2\}$. Quindi, $\sigma v(2, 3) = v(1, 2)$. Dovrebbe essere evidente che il gioco $< N, w >$ nell'esempio precedente non è altro che il gioco $< N, \sigma v >$, essendo σ la permutazione che stiamo considerando (quella che scambia 1 con 3).

Segue dall'esempio: sia $i = 1$. Allora $\sigma(i) = \sigma(1) = 3$. Con la definizione 5.2, vogliamo quindi che $\Psi_3(\sigma v) = \Psi_3(w) = \Psi_1(v)$. Cioè quel che viene assegnato al giocatore 1 nel gioco $< N, v >$, deve essere assegnato al giocatore 3 nel gioco $< N, w >$.

Per introdurre l'assioma successivo abbiamo bisogno di dire cos'è il contributo marginale di un giocatore. Lo avevamo già introdotto nella discussione iniziale sull'efficienza. Se S è una coalizione, ed $i \in S$, il numero reale $v(S) - v(S \setminus \{i\})$ viene detto contributo marginale di i alla coalizione S. Se si ha che $v(S) - v(S \setminus \{i\}) = 0$ per ogni coalizione S che non contiene i, il giocatore i viene detto *"dummy player"*. In altri termini, se ad una coalizione S si aggiunge il giocatore i, ciò non contribuisce a migliorare o a peggiorare la situazione della coalizione S.

Assioma 5.3 ("Dummy player") *Se in un gioco $< N, v >\in \mathcal{C}^N$ il giocatore i è un "dummy player", allora $\Psi_i(v) = 0$.*

L'ultima condizione è molto facile da enunciare:

Assioma 5.4 (Additività) *Per tutti i giochi $< N, v >, < N, w >\in \mathcal{C}^N$ tali che $< N, v + w >\in \mathcal{C}^N$, deve essere*
$\Psi_i(v + w) = \Psi_i(v) + \Psi_i(w)$, per ogni $i \in N$.

Dei quattro assiomi quest'ultimo è il più discutibile, in quanto sommare due giochi può produrre un terzo gioco in cui la posizione "strategica" del giocatore i potrebbe essere difficilmente correlata a quella che lui ha nei due giochi "addendi".

Teorema 5.1 (Shapley, 1953) *Dato N esiste ed è unica $\Phi : \mathcal{G}^N \to I\!R^n$ che soddisfa gli assiomi 5.1, 5.2, 5.3, 5.4. Inoltre, si ha:*

$$\Phi_i(v) = (\frac{1}{n!}) \sum_\sigma m_i^\sigma(v) \text{ per ogni } i \in N \tag{31}$$

Per capire la formula, dobbiamo sapere cosa vuol dire $m_i^\sigma(v)$. L'idea è semplice $\sigma : N \to N$ è una permutazione. Consideriamo $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$. Essendo $i \in N$, ci sarà un certo indice $j \in N$ t.c. $i = \sigma(j)$. Consideriamo allora la coalizione $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j-1)\}$. E la coalizione $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j)\}$. Essendo $i = \sigma(j)$, abbiamo che i non appartiene alla coalizione $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j-1)\}$, mentre $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j)\}$ è ottenuta aggiungendo i. Allora $v(\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j)\}) - v(\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j-1)\})$ è il contributo marginale di i alla coalizione $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j-1)\}$. E $m_i^\sigma(v)$ indica esattamente ciò: $m_i^\sigma(v) = v(\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j)\}) - v(\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j-1)\})$ dove $i = \sigma(j)$.

La formula ha una interpretazione probabilistica. Supponiamo che i giocatori entrino uno dopo l'altro in una stanza, seguendo l'ordine dato dalla permutazione σ. Ad ogni giocatore, entrando nella stanza, viene dato il suo contributo marginale alla coalizione che già si trovava nella stanza. Non c'è ragione di privilegiare una permutazione rispetto ad un'altra. E quindi calcoliamo il valor medio di questi contributi marginali. Da qui la formula (ricordo che $n!$ è il numero di permutazioni su un insieme di n elementi).

La formula data può naturalmente essere usata per calcolare il valore Shapley, però ha il difetto di richiedere una quantità di calcoli enorme, se il numero totale dei giocatori è grande. Si noti che ad esempio è $10! = 3.628.800$ e quindi se abbiamo un gioco con 10 giocatori questo e' il numero di addendi della somma che dobbiamo calcolare applicando la formula.

In realtà, quando entra nella stanza, al giocatore i non interessa sapere in che ordine sono entrati gli $s-1$ giocatori già presenti ($s = |S|$) nè in che ordine entreranno gli $n-s$ giocatori assenti. Quindi il valore $(v(S) - v(S \backslash \{i\})$ si presenta nella sommatoria $(s-1)!(n-s)!$ volte

$$\Psi_i(v) = \sum_{S \subseteq N, S \ni i} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} (v(S) - v(S \setminus \{i\})) \tag{32}$$

Poichè le coalizioni che non contengono i sono 2^{n-1}, questa sommatoria contiene soltanto 2^{n-1} (512 se $n = 10$), il che semplifica notevolmente il calcolo.
Questo significa anche porre nella (28) $p_i(S) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$.

La relazione esistente tra l'indice di Shapley e gli assiomi mostrati, come detto nell'enunciato del teorema, è un risultato che vale per qualsiasi gioco $< N, v >$ appartenente alla classe dei giochi cooperativi $\mathcal{G}^N$. Questo significa che gli assiomi 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 sono soddisfatti contemporaneamente unicamente dal valore Shapley in $\mathcal{C}^N \equiv \mathcal{G}^N$ (si veda la definizione degli assiomi 5.1, 5.2, 5.3, 5.4). Ma il risultato si limita a questo: tutt'altra cosa sarebbe riproporre lo stesso identico enunciato del teorema di Shapley sulla classe dei giochi semplici $\mathcal{SG}^N \subset \mathcal{G}^N$. A questo proposito si pensi all'assioma di additività, che risulta totalmente inutile se definito sulla classe dei giochi semplici: tutti i giochi semplici, così come li abbiamo definiti, hanno la grande coalizione vincente, quindi la somma di due giochi semplici non è un gioco semplice.

Esercizio 5.1 *Si provi a definire un indice di potere diverso dall'indice di Shapley in grado di soddisfare gli assiomi 5.1, 5.2, 5.3 sulla classe dei giochi semplici.*

Per trovare una caratterizzazione assiomatica dell'indice di Shapley sui giochi semplici non bastano gli assiomi 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 (o meglio gli assiomi 5.1, 5.2, 5.3, visto che 5.4 è inutile). Bisogna aggiungere qualcosa che l'assioma di additività, in questo caso, non riesce a catturare. Introduciamo quindi l'assioma seguente, detto del *trasferimento*:

Assioma 5.5 (Trasferimento) *Per tutti i giochi* $< N, v >, < N, w > \in \mathcal{C}^N$*,*

$$\Psi_i(v \vee w) + \Psi_i(v \wedge w) = \Psi_i(v) + \Psi_i(w), \forall i \in N. \tag{33}$$

dove
$(v \vee w)(S) = v(S) \vee w(S) \forall S \subseteq N,$ *in cui* $a \vee b = \max\{a, b\} \forall a, b \in I\!R$
$(v \wedge w)(S) = v(S) \wedge w(S) \forall S \subseteq N,$ *in cui* $a \wedge b = \min\{a, b\} \forall a, b \in I\!R$

Lo abbiamo ovviamente definito su qualsiasi classe $\mathcal{C}^N \subseteq \mathcal{G}^N$. Infatti questo assioma non è affatto slegato da quello di additività, anzi quello di additività, sulla classe di tutti i giochi cooperativi $\mathcal{G}^N$, implica quello di trasferimento sulla stessa classe, come si vede facilmente dai seguenti passaggi:

$$\Psi(v \vee w) + \Psi(v \wedge w) = \Psi(v \vee w + v \wedge w) = \Psi(v + w) = \Psi(v) + \Psi(w) \tag{34}$$

L'assioma di trasferimento, però, definito sulla classe dei giochi semplici $\mathcal{SG}^N$, non è inutile come risultava essere quello di additività sulla stessa classe $\mathcal{SG}^N$. Infatti non esiste più il problema che il gioco $< N, v + w >$ debba appartenere alla classe $\mathcal{SG}^N$. Non solo: tale assioma è in grado, in aggiunta agli altri tre (5.1, 5.2, 5.3), di caratterizzare l'indice di Shapley sulla classe dei giochi semplici. È quindi possibile dimostrare il seguente teorema:

Teorema 5.2 *Dato un gioco* $< N, v > \in \mathcal{SG}^N$ *esiste ed è unica* $\Phi : \mathcal{SG}(N) \to I\!R^n$ *che soddisfa gli assiomi 5.1, 5.2, 5.3, 5.5. Tale* Φ *coincide con il valore Shapley del gioco* $< N, v >$.

Tornando a parlare dei metodi computazionali per calcolare il valore Shapley, se il gioco è "piccolo", la formula (31) ci permette di calcolarlo abbastanza facilmente. Vediamo un esempio nel caso dei giochi semplici.

Esempio 5.3 *Si consideri una Società con tre azionisti, $N = \{1, 2, 3\}$, che si dividono l'intero stock azionario nelle percentuali del $20, 30$ e 50 per cento rispettivamente.*
Si assuma che ogni decisione possa essere approvata dal consiglio degli azionisti solo se in possesso della maggioranza semplice (quorum del 50% più uno) delle quote azionarie.
Questo gioco può essere trattato come un gioco semplice di maggioranza pesata a tre giocatori nel quale le coalizioni vincenti sono:
$\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$.
Possiamo calcolare il valore Shapley di questo gioco costruendo la tabella seguente, dove nella prima colonna mettiamo le varie permutazioni possibili dei tre giocatori, mentre nella colonna "intestata" con $i = 1, 2, 3$ mettiamo i guadagni marginali attribuiti al giocatore i nele varie permutazioni possibili. Le due ultime righe contengono le somme dei guadagni marginali e poi tali valori divisi per 6 (ovverossia $3!$), vale a dire il valore Shapley.

permutazione	1	2	3
123	0	0	1
132	0	0	1
213	0	0	1
231	0	0	1
312	1	0	0
321	0	1	0
totale	1	1	4
valore Shapley	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$

Se il gioco è semplice, come nell'esempio precedente, $v(S) - V(S \setminus \{i\}) = 1$ quando la coalizione S è vincente e la coalizione $S \setminus \{i\}$ è perdente, altrimenti il contributo marginale è uguale a zero. Perciò la formula (32) diventa:

$$\Psi_i(v) = \sum_{S \in A_i} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \tag{35}$$

dove A_i denota l'insieme di tutte le coalizioni vincenti S che contengono il giocatore i e tali che $S \setminus \{i\}$ siano perdenti. Questa formulazone per la classe dei giochi semplici viene generalmente indicata con il nome di indice di Shapley - Shubik, dal nome dei due autori che la introdussero nel 1954.

Esercizio 5.2 *Calcolare il valore Shapley per l'esempio precedente utilizzando la formulazione di Shapley - Shubik.*

Si dimostra che il vettore Shapley è un imputazione del gioco. Non sempre invece sta nel nucleo.

6 L'indice di Banzhaf

L'indice di Banzhaf è un altro indice di potere basato sui contributi marginali come quello di Shapley.
Questa volta però, tutte le coalizioni alle quali appartiene il giocatore i sono considerate equiprobabili. Quindi nella (28), essendo il numero di coalizioni possibili a cui i appartiene pari a 2^{n-1} (cioè tutte quelle coalizioni ottenute dalle coalizioni prive di i, che sono 2^{n-1} appunto, con l'aggiunta di i), basta sostituire $p_i(S) = \frac{1}{2^{n-1}}$. L'indice di Banzhaf corrisponde infatti a:

$$\beta_i(v) = \sum_{S \subseteq N, S \ni i} \frac{1}{2^{n-1}} (v(S) - v(S \setminus \{i\})) \tag{36}$$

Esempio 6.1 *Proviamo a calcolare l'indice di Banzhaf del gioco nell'esempio 5.3 utilizzando la formula (36). Per questo motivo costruiamo la tabella seguente, dove nella prima colonna mettiamo le varie coalizioni possibili dei tre giocatori, mentre nella colonna "intestata" con $i = 1, 2, 3$ mettiamo i guadagni marginali attribuiti al giocatore i nele varie coalizioni possibili. Ovviamente quando un giocatore non appartiene alla coalizione, nella casella di incrocio metteremo *, che sta a significare che il termine non va considerato, come da definizione della sommatoria in (36). Le due ultime righe contengono le somme dei guadagni marginali e poi tali valori divisi per* 4 *(ovverossia* $2^{3-1)}$*), vale a dire l'indice di Banzhaf.*

coalizione	1	2	3
$\{\emptyset\}$	$*$	$*$	$*$
$\{1\}$	0	$*$	$*$
$\{2\}$	$*$	0	$*$
$\{3\}$	$*$	$*$	0
$\{1,2\}$	0	0	$*$
$\{1,3\}$	1	$*$	1
$\{2,3\}$	$*$	1	1
$\{1,2,3\}$	0	0	1
totale	1	1	4
Indice Banzhaf	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Tale vettore è evidentemente diverso dal vettore di Shapley.
Non solo: la somma delle componenti del vettore di Banzhaf è diversa da 1.

Esercizio 6.1 *Si consideri il gioco a quattro giocatori* $< \{1, 2, 3, 4\}, v >$ *tale che* $v(N) = 1$ *e* $v(S) = 0 \quad \forall S \subset N$. *Calcolarne l'indice di Shapley e quello di Banzhaf.*
*(*Sol. *Shapley:* $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$*; Banzhaf:* $(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$ *)*

Il fatto che la somma delle componenti del vettore di Banzhaf sia diversa da 1 è una proprietà di tale vettore, o meglio una mancanza del requisito di

soddisfare l'assioma di efficienza.
Chi volesse tentare di normalizzare il vettore, magari per cercare di confrontarlo meglio con il vettore Shapley, è libero di farlo: anzi, l'indice di Banzhaf *normalizzato* (detto anche indice di Banzhaf-Coleman) è un ulteriore indice di potere (vedremo più avanti con quali proprietà e quali "distorsioni").
Nel caso dell'esempio 6.1 appena illustrato otterrebbe il vettore $\theta(v) = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5})$ che continua ad essere diverso dal vettore Shapley.
Non a caso il vettore di Banzhaf può essere nel contempo diverso dal vettore Shapley e non essere efficiente. Il vettore Banzhaf, infatti, soddisfa gli assiomi 5.2, 5.3 e 5.4 ma non l'assioma 5.1.
Ed è soltanto questa mancanza che lo differenzia dal vettore Shapley.
Con questo siamo ben lungi dall'affermare che il vettore Banzhaf sia l'unico vettore in grado di soddisfare gli assiomi 5.2, 5.3 e 5.4.

Esercizio 6.2 *Trovare almeno due esempi di indici che soddisfino gli assiomi 5.2, 5.3 e 5.4.*

Ad esempio l' *indice nullo*, che è dato da

$$\rho_i(v) = 0 \qquad \forall < N, v > \in \mathcal{G}^N \qquad i \in N \tag{37}$$

soddisfa anch'esso gli stessi assiomi.
Stesso discorso si può fare per l' *indice dittatoriale*, così definito

$$\rho_i(v) = v(\{i\}) \qquad \forall < N, v > \in \mathcal{G}^N \qquad i \in N \tag{38}$$

e l' *indice marginale* che è invece il seguente

$$\mu_i(v) = v(N) - v(N \setminus \{i\}) \qquad \forall < N, v > \in \mathcal{G}^N \qquad i \in N \tag{39}$$

Si potrebbe contestare che questi sono comunque degli indici "banali", ma ciò non toglierebbe il fatto che l'unicità dell'indice nel soddisfare i suddetti assiomi, in questo caso, non esiste. Non solo: anche se si volesse dimostrare che i quattro indici sono gli unici che soddisfano i suddetti assiomi, ci troveremmo impossibilitati a farlo.

Per caratterizzare assiomaticamente l'indice di Banzhaf almeno nella classe $\mathcal{SG}^N$ dei giochi semplici abbiamo bisogno di un ulteriore assioma. Quale? Esattamente quello che asserisce che la somma delle componenti dell'indice di potere sia uguale a quello fornito dalla somma delle componenti della (36).

Assioma 6.1 (Banzhaf total power) *Per tutti i giochi* $< N, v > \in \mathcal{C}^N$

$$\sum_{i \in N} \psi_i(v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i \in N} \left(\sum_{S \subseteq N, S \ni i} \Big(v(S) - v(S \setminus \{i\})\Big) \right) \tag{40}$$

Inoltre, ancora una volta, dovremo abbandonare l'assioma 5.4, che sulla classe $\mathcal{SG}^N$ continua ad essere inutile, a favore di quello 5.5.

Teorema 6.1 *Il solo indice capace di soddisfare gli assiomi 5.2, 5.3, 5.5 e 6.1 per ogni gioco appartenente alla classe dei giochi semplici* $\mathcal{SG}^N$ *è l'indice di Banzhaf.*

Come annunciato in precedenza, anche l'indice di Banzhaf normalizzato possiede una propria caratterizzazione assiomatica.
Non faremo accenno agli assiomi della caratterizzazione dall'indice normalizzato (che, almeno in parte, non sono gli stessi che caratterizzano l'indice di Banzhaf classico). La scelta di non presentarli è legata anche al fatto che tale indice possiede degli aspetti paradossali.
Per esempio una proprietà "carina" che desidereremmo aspettarci da un indice di potere è che in un gioco di maggioranza pesata in cui due elettori si uniscono, il nuovo elettore nato dall'unione, nel nuovo gioco di maggioranza non stia peggio di prima. Ebbene l'indice di Banzhaf normalizzato non possiede questa proprietà. Illustriamo questa asserzione con il seguente esempio:

Esempio 6.2 (5.8 in Felsenthal e Machover 1995) *Si consideri il gioco di maggioiranza pesata* $[25; 9, 9, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$*. Se i giocatori* 1 *e* 4 *si fondono, otteniamo il nuovo gioco di maggioranza pesata* $[25; 10, 9, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$*. Sebbene infatti la componente dell'indice di Banzhaf relativa al giocatore* 1 *(rispettivamente, al giocatore* 4*) passi da* $\frac{129}{512}$ *(rispettivamente,* $\frac{1}{512}$*) prima dell'unione, ad un valore per il giocatore "unione" del secondo gioco pari a* $\frac{65}{256}$ *(pari cioè alla somma dei due indici del primo gioco) la somma di tutte le componenti dei due indici nel primo e nel secondo gioco rispettivamente passa da* $\frac{196}{256}$ *a* $\frac{199}{256}$*. Quindi l'indice di Banzhaf normalizzato diminuisce dopo l'unione.*

In maniera analoga, l'indice di Banzhaf normalizzato, viola anche la ragionevole proprietà per la quale se un giocatore regala parte del suo peso a qualche altro giocatore, allora non dovrebbe guadagnare potere. Si consideri il seguente esempio:

Esempio 6.3 (5.8 in Felsenthal e Machover 1995) *Si consideri il gioco di maggioiranza pesata* $[8; 5, 3, 1, 1, 1]$*. Se il giocatore* 1 *dona un voto al giocatore* 2*, otteniamo il nuovo gioco di maggioranza pesata* $[8; 4, 4, 1, 1, 1]$*. Sebbene infatti la componente dell'indice di Banzhaf relativa al giocatore* 1 *passi da* $\frac{9}{16}$ *prima dell'unione, ad un valore nel secondo gioco pari a* $\frac{1}{2}$*, la somma di tutte le componenti dei due indici nel primo e nel secondo gioco rispettivamente passa da* $\frac{19}{16}$ *a* 1*. Quindi l'indice di Banzhaf normalizzato del giocatore* 1 *aumenta dopo aver fatto il regalo al giocatore* 2*.*

La morale potrebbe essere la seguente: forse è meglio rinunciare all'assioma di efficienza che cercare di soddisfarlo a tutti i costi, magari procedendo ad una "distorsiva" normalizzazione.

7 Considerazioni sull'equità

7.1 Paradosso dell'Alabama

Fino a questo momento abbiamo parlato di indici di potere dei giocatori. Il potere dei giocatori è misurato in relazione al ruolo rivestito delle varie coalizioni nel gioco, che può essere di vittoria o sconfitta. D'altro canto, nei contesti reali che si possono rappresentare tramite giochi semplici, per esempio i meccanismi elettorali, il concetto di vittoria o sconfitta sono collegati, sempre nell'ottica dell'esempio, al passaggio o meno di una certa decisione o anche alla nomina dei propri rappresentanti politici (come nel gioco del Parlamento o del Consiglio).
Questi giochi, quindi, esprimono situazioni più complesse dell'esclusivo concetto di vittoria o sconfitta. Queste situazioni associano alla vittoria un ritorno, verso la coalizione vincente, di una serie di benefici che possono essere quelli ottenuti dalla decisione presa oppure la rappresentatività politica negli organi legislativi o di governo. Esiste cioè in queste situazioni la necessità di un'equa redistribuzione dei benefici ottenuti, o dei beni che li producono, tra gli individui partecipanti al gioco. Si potrebbe pensare di suddividere questi beni in misura proporzionale agli indici di potere dei giocatori nel gioco, e in taluni casi il metodo potrebbe essere del tutto giustificato (probabilmente si presenterebbe sempre il problema di decidere quale indice di potere utilizzare). Ma cosa fare quando tali beni sono indivisibili? Un classico esempio è quello dell'attribuzione della rappresentatività tra i collegi elettorali (Young 1995). Nel caso degli Stati Uniti i seggi nella Casa dei Deputati, sono attribuiti tra gli Stati in accordo ad una formula matematica che dipende dalla popolazione degli Stati stessi. Nei paesi che utilizzano sistemi di rappresentazione di tipo proporzionale, l'obiettivo è quello di allocare i seggi tra i vari partiti politici in proporzione ai loro voti totali. In entrambi i casi appena descritti, l'ideale di equità sarebbe riuscire ad attribuire ad ogni persona uno ed un solo voto (*one person one vote*): ogni persona dovrebbe avere un'identica percentuale di rappresentatività, e ad ogni rappresentante dovrebbe corrispondere lo stesso numero di persone. Ad ogni modo, l'ideale non può quasi mai essere messo in pratica, a causa della natura indivisibile dei rappresentanti. Per effetto dei meccanismi di approssimazione, alcuni Stati otterranno di più della loro effettiva percentuale di rappresentatività, mentre altri ne otterranno di meno. La questione, quindi, diventa la seguente: cosa si intende per "più vicini all'equità quanto è possibile" quando l'equità perfetta non può mai, o quasi,

essere raggiunta?
Questo sorprendentemente difficile problema ha interessato vari uomini di stato, studiosi di politica e matematici per più di due secoli. La ragione è la grande importanza che l'attribuzione dei seggi gioca nella rappresentatività nel governo. La differenza di soltanto un seggio può essere decisiva per determinare l'inclinazione della bilancia del potere nel corso di una legislatura. Quindi il meccanismo dell'attribuzione dei seggi è di indiscutibile interesse per i politici. Ad ogni modo, problemi analoghi sorgono anche in molti altri settori della vita sociale. Si pensi ad esempio agli insegnanti, i quali vengono assegnati ai corsi in proporzione al numero di studenti che vengono registrati per loro. Oppure si pensi al personale medico che viene assegnato alle unità militari in proporzione al numero di soldati in ogni unità; o ancora all'allocazione dei computers e del personale tecnico alle divisioni di una azienda in accordo alla necessità ed alla domanda.

Negli Stati Uniti, la distribuzione dei rappresentanti è stato argomento di attivo dibattito sin dalla Convenzione Costituzionale nel 1787. Il risultato principale per la Convenzione, comunque, non fu la scelta della formula con la quale attuare la distribuzione, ma le basi della rappresentatività. Cosa costituisce per uno Stato la pretesa di essere rappresentato: il numero di abitanti? Il numero degli aventi diritto al voto? La dimensione del suo prodotto economico interno? Il fatto stesso di essere un Stato?
La storia americana presenta vari cambiamenti sulla definizione delle basi di rappresentatività. Oggi, le basi per la distribuzione dei deputati negli Stati Uniti è praticamente la conta dei residenti, a parte alcune "piccole" differenze, come il più di un milione di soldati che prestano servizio all'estero che, nell'attribuzione dei seggi, sono contati nel loro Stato di provenienza. Inoltre ogni Stato deve avere almeno un proprio deputato nella Casa.
Il problema di trovare un meccanismo di attribuzione dei seggi il più equo possibile, invece, fu materia molto più dibattuta e probabilmente ancora irrisolta. Come indicazione generale di tutti i problemi che ci possono essere in questo tipo di ricerca, di seguito presenteremo il metodo suggerito per primo da Alexander Hamilton, Segretario del Tesoro, dopo i risultati del primo censimento americano del 1791. Ma prima, alcune precisazioni:

Definizione 7.1 Definiamo *quota di rappresentatività* di uno Stato come la frazione che la popolazione dello Stato rappresenta del totale della popolazione, moltiplicato per il numero totale di seggi. Quindi se le popolazioni di n Stati sono $p_1, p_2, \dots, p_n$ e ci sono a_0 seggi che devono essere distribuiti, la *quota di rappresentatività* di uno Stato $i = 1, \dots, n$ è $q_i = \frac{a_0 p_i}{\sum_{j=1}^{n} p_j}$.

■

Esempio 7.1 *Tre Stati* a, b *e* c *con la popolazione illustrata nella tabella seguente devono dividersi* 21 *seggi:*

Stato	*Popolazione*	*Quota di rappresentatività*
a	7270000	14.24
b	1230000	2.41
c	2220000	4.35
totale	10720000	21

Appare evidente che a *riceverà almeno* 14 *seggi,* b *almeno* 2 *e* c *almeno* 4. *La questione è: quale Stato riceverà il* 21*-esimo seggio? L'esito è di rilevante importanza. Per esempio, la decisione di attribuire allo Stato* b *due o tre seggi determina una differenza del* 50 *per cento del numero di seggi disponibili per lo Stato* b*.*

Il modo più semplice e forse più ovvio per dare una risposta al problema dell'esempio 7.1 è proprio quello suggerito da Hamilton, ovvero attribuire il seggio "extra" allo Stato avente la parte frazionaria più alta. Più precisamente il metodo suggerito da Hamilton è il seguente:

Definizione 7.2 [Metodo di Hamilton]
Dato un insieme di n Stati ognuno con la propria quota di seggi:

- si dia ad ogni Stato tanti seggi quanti indicati dalla parte intera della propria quota;
- se $t \leq n$ seggi non sono stati assegnati al punto precedente, questi vengano distribuiti (un seggio per ogni Stato) tra i t Stati con le parti frazionarie più alte.

■

Nell'esempio 7.1, il metodo di Hamilton produce la seguente attribuzione di seggi: 14 per a, 3 per b e 4 per c.
Il metodo di Hamilton, insieme ad alcuni altri, è uno dei metodi più ampiamente utilizzati per l'attribuzione dei seggi nelle legislature di vari paesi.
Negli Stati Uniti è stato utilizzato nel passato ma fu abbandonato per colpa di un difetto non da poco. Durante il diciannovesimo secolo, il numero di membri della Casa dei Deputati aumentava ogni decade per tenere in considerazione i nuovi Stati annessi all'Unione. Fu in seguito al censimento del 1880, che il capo cancelliere dell'Ufficio Censimento, C.W.Seaton, calcolò la distribuzione dei seggi usando il metodo di Hamilton per tutto l'intervallo dimensionale raggiunto dalla Casa in quegli anni, da 275 deputati a 350. In una lettera al Congresso, Seaton affermava:
"Elaborando i calcoli per l'attribuzione dei seggi, mi sono scontrato con il cosiddetto *Paradosso dell'Alabama*, cioè il fatto che allo Stato dell'Alabama

spettassero 8 rappresentanti quando il totale era di 299, mentre allo stesso Stato, considerando la stessa distribuzione di popolazione nei vari Stati, ne spettavano 7 quando il totale fu portato a 300. Tale risultato è per me conclusivo nel ritenere che tale metodo è difettoso".
Questo fenomeno può essere illustrato attraverso l'esempio 7.1. Se i seggi totali fossero stati 22 invece che 21, allora le quote di rappresentatività sarebbero state: 14.92 per a, 2.52 per b e 4.56 per c. Quindi il metodo di Hamilton avrebbe attribuito 15 deputati per a, 2 per b e 5 per c. Comparando questi risultati con quelli ottenuti per 21 seggi in totale, si vede che b ha perso un seggio in presenza di una Casa dei Deputati più numerosa. La ragione sta nel fatto che la quota di rappresentatività di b aumenta meno rapidamente in termini assoluti che le quote di rappresentatività di a e di c. La parte intera di b è la più grande quando i seggi sono 21 e la più piccola quando i seggi totali sono portati a 22, impedendo a b di ricevere il seggio extra.
Nonostante ciò, gli Stati Uniti mantennero inalterato il metodo di attribuzione dei seggi sino al 1911, quando, dopo altre pesanti evidenze di difetto del tipo appena illustrato, il metodo fu definitivamente abbandonato in favore di un altro.

7.2 Elezione del Presidente degli Stati Uniti

Nel paragrafo precedente abbiamo esaminato il problema di garantire la corretta rappresentatività degli elettori, problema che traeva origine dalla naturale indivisibilità dei rappresentanti.
Ora presenteremo un problema sempre di rappresentatività degli elettori che però sta a monte del precedente ed è direttamente collegato ai meccanismi ed alle regole di votazione utilizzate.
Il metodo attualmente utilizzato per scegliere il presidente degli Stati Uniti d'America è costituito da due fasi: nella prima gli elettori di ogni singolo Stato eleggono a maggioranza i cosiddetti "Grandi Elettori" o membri del Collegio Elettorale che, nella fase successiva, voteranno a loro volta per il Presidente. Ogni Stato ha a disposizione un numero di Grandi Elettori definito dalla quota di rappresentatività (e dai meccanismi di arrotondamento utilizzati). Generalmente si assume (sebbene nella pratica possano esserci eccezioni occasionali a questa regola) che tutti i Grandi Elettori di un dato Stato voteranno per il candidato alla Presidenza preferito dalla maggioranza dello Stato nel quale sono stati eletti.
Dato questo meccanismo, per un candidato alla Presidenza una vittoria di misura in uno Stato grande (cioè con un elevato numero di Grandi Elettori) potrebbe essere migliore di tante vittorie schiaccianti in altrettanti piccoli Stati (per esempio, se supponiamo che ad ogni milione di consensi corrisponda un Grande Elettore, conviene avere due milioni più uno consensi in uno stato in cui il totale della popolazione votante è quattro milioni piuttosto che

tre milioni di consensi su tre Stati diversi ciascuno con un milione di popolazione votante). In altre parole, con un tale meccanismo, possono risultare vincenti coalizioni con meno della metà dei consensi popolari.
Possiamo modellizzare questo meccanismo elettorale come la v-composizione (si veda in proposito il capitolo sui giochi semplici)

$$u = v[w_1, w_2, \ldots, w_51],$$

dove $< A, u >$ è il gioco dell'elezione del Presidente degli Stati Uniti (cioè il gioco tra tutti gli appartenenti all'insieme degli aventi diritto al voto negli Stati Uniti, che costituiscono l'insieme A), $< G, v >$ è il gioco nel Collegio Elettorale (cioè il gioco delle elezioni tra i Grandi Elettori, che costituiscono l'insieme G) e $< N_1, w_1 >, < N_2, w_2 >, \ldots, < N_51, w_51 >$ sono i giochi nei singoli Sati, cioè $< N_j, w_j >$, $j = 1, 2, \ldots, 51$, è il gioco giocato tra gli elettori nel j-esimo Stato (cioè dagli elettori che costituiscono l'insieme N_J).
Per un dato Stato j, $j = 1, 2, \ldots, 51$, $< N_j, w_j >$ è un gioco di maggioranza semplice tra $n_j = |N_j|$ giocatori. Questo significa che, come abbiamo visto nel capitolo sui giochi semplici, la funzione caratteristica di tale gioco sarà definita come segue:

$$w_j(S) = \begin{cases} 0 & |S| \leq \frac{n_j}{2} \\ \\ 1 & |S| > \frac{n_j}{2} \end{cases} \tag{41}$$

Assumendo, come abbiamo fatto, che tutti i Grandi Elettori di un dato Stato votino nella stessa maniera, $< G, v >$ risulta invece essere un gioco di maggioranza pesata a 51 giocatori definito dalla struttura di pesi e quota $[270; p_1, p_2, \ldots, p_{51}]$, dove il peso p_j, $j = 1, 2, \ldots, 51$, è il numero di Grandi Elettori provenienti dal j-esimo Stato. Nel 1977, l'anno al quale Owen ha riferito nel suo libro l'esempio che stiamo trattando, tali pesi variavano tra i 45 della California ai 3 degli Stati più piccoli e del Distretto della Columbia. Oggi i pesi sono leggermente diversi da quelli del 1977, ma la struttura del gioco è indicativamente la stessa.
Ed è proprio questa struttura che Owen cercò di analizzare tramite il calcolo degli indici di potere (sia di Shapley che di Banzhaf) dei giocatori del gioco $< A, u >$. Ciò che infatti non è per niente ovvio è riuscire a capire se il gioco $< G, v >$ non favorisce alcuni elettori degli Stati Uniti nei confronti di altri o, in altri termini, se il potere di ciascun cittadino avente diritto al voto è lo stesso a prescindere dallo Stato di appartenenza (ancora una volta vogliamo vedere se è rispettato il principio "*one man one vote*").
Calcolare gli indici di Sahpley e di Banzhaf per il gioco di maggioranza $< G, v >$, dato l'elevato numero di giocatori, non è banale e anche con il calcolatore, senza fare le debite semplificazioni, può risultare un problema irrisolvibile. Owen, nel suo libro, mostra un metodo per giungere ad una stima approssimata di tali indici e li confronta con i risultati veri, la cui computazione, però, non è mostrata. Nella seguente tabella riportiamo uno

stralcio a nostro avviso significativo della tabella in cui Owen mostra i valori Shapley e Banzhaf da lui calcolati per gli aventi diritto al voto nei vari Stati dell'Unione:

Stato	Votanti	Numero di grandi elettori	Indice Shapley ($\Phi \times 10^{-9}$)	Indice Banzhaf ($\Psi \times 10^{-5}$)
California	19953134	45	7.8476	8.6624
Distretto della Columbia	765510	3	2.4783	2.7616
Florida	6789433	17	4.7326	5.2716
Montana	694409	4	3.4516	3.8407

Si noti già da questi pochi dati di che entità siano le discrepanze tra il potere degli aventi diritto al voto, indicate sia dal valore Shapley che dall'indice Banzhaf. Entrambi gli indici mostrano come il potere di un cittadino elettore in California sia approssimativamente il triplo del potere di un cittadino elettore nel Distretto della Columbia. Anche per gli elettori della Florida, Stato molto problematico per la proclamazione del Presidente nell'elezione del 2000, la situazione è nettamente favorevole rispetto agli Stati più piccoli. Altra situazione caratteristica è il rapporto tra gli indici di due Stati (o più precisamente dell'unico Distretto e di uno Stato), entrambi tra i più piccoli: il Distretto della Columbia e lo Stato del Montana. Pur avendo un solo Grande Elettore di differenza (a questo proposito si noti il numero di Grandi Elettori per il Montana, che ha meno elettori del Distretto della Columbia ma nonostante ciò possiede un Grande Elettore in più dal momento che la distribuzione dei Grandi Elettori è calcolata sulle quote di rappresentatività, cioè sulla popolazione residente), il potere dei cittadini aventi diritto al voto in Montana è quasi una volta e mezzo quello dei cittadini aventi diritto al voto nel Distretto della Columbia.

Parte III
Scelte sociali

8 Introduzione

Nella prima parte abbiamo osservato come i giochi semplici possano rappresentare modelli formali di meccanismi o regole di votazione utilizzati per prendere decisioni all'interno di consessi di vario tipo. Nella seconda parte abbiamo preso in esame alcuni indici in grado di fornire una misura del potere dei singoli all'interno del meccanismo o regola di votazione. A questo punto abbiamo gli strumenti necessari per affrontare il naturale passo successivo: tener presente che i meccanismi di decisione servono appunto per prendere decisioni. Quale decisione sarà presa (ad esempio sulla base di una o più votazioni) dipenderà dalle preferenze degli individui che compongono il consesso decisionale. Discuteremo quindi rilevanti questioni quali: è possibile ideare un sistema o regola di votazione che sia in grado di evitare al tempo stesso l'arbitrarietà della decisione (cioè che sia in qualche misura "coerente" con le preferenze dei singoli individui), le situazioni senza sbocco e l'ineguaglianza di potere?
Ma prima di tentare di rispondere a questo interrogativo, dovremo affrontare il problema di come rappresentare e trattare le preferenze che gli agenti hanno sulle alternative. I meccanismi di votazione sono volti a catturare le preferenze degli agenti e ad aggregarle, restituire cioè, in qualche maniera più o meno "coerente", un sistema di preferenza collettivo, brutalmente descrivibile come l'ordinamento delle alternative secondo un livello di "importanza sociale" che la collettività, nel complesso, attribuisce a ciascuna di esse. Occorrerà quindi introdurre un linguaggio ad hoc per rappresentare le preferenze individuali, studiarne il comportamento, le modalità di aggregazione e le proprietà e le problematiche che tali modalità possono comportare nella struttura delle preferenze collettive.
Il problema è naturalmente molto antico. Vale la pena di ricordare la rilevanza, anche filosofica, dell'*utilitarismo*, che tentava di offrire una risposta a questi problemi di carattere aggregativo. In generale, comunque, tutto ciò che ha implicazioni con i metodi di aggregazione delle preferenze dei singoli, è di interesse molto vasto, ed è legato anche a questioni fondamentali in scienze politiche ed economia. Gli studiosi di scienze politiche lo incontrano quando devono ideare o valutare sistemi di votazioni per comitati o assemblee legislative. Gli economisti lo affrontano analizzando metodi di razionamento e altri metodi di distribuzione delle risorse, che sono aspetti caratteristici di quella che solitamente viene definita *pianificazione economica*. Questo tipo di considerazioni possono risultare di estrema importanza qualora si voglia, per esempio, determinare la natura di un intervento governativo all'interno di un'economia di libero mercato.

Alcuni meccanismi di scelta decisionale collettiva li abbiamo sin qui visti nella veste di giochi semplici. Si pensi ad esempio ad n giocatori, i quali sono chiamati a scegliere tra due alternative, A_1 e A_2. Ci potranno essere gli individui che sono propensi ad adottare la decisione A_1 (cioè preferiscono l'alternativa A_1 all'alternativa A_2) e quelli che sono propensi ad adottare la decisione A_2 (cioè preferiscono l'alternativa A_2 all'alternativa A_1). Se tutti gli individui sono d'accordo nell'adottare la stessa decisione e se tutti hanno lo stesso peso all'interno del processo decisionale, allora è difficile immaginare che la decisione presa sia diversa da quella voluta all'unanimità. Qualora invece i consensi degli individui siano distribuiti in percentuale non nulla su entrambe le decisione, quale decisione verrà adottata dipende completamente dal meccanismo o regola decisionale utilizzata dal gruppo. Una regola potrebbe essere quella di adottare le decisioni sostenute dalle coalizioni vincenti di un gioco semplice definito sugli n giocatori. Si noti che non si è fatto ancora accenno alle problematiche legate, per esempio, al fatto che coalizioni complementari, che sostengono decisioni diverse, possano essere entrambe vincenti. Per ovviare a questo e ad altri problemi che potrebbero prendere origine dalle considerazioni oggetto dell'ultimo paragrafo della parte sui giochi semplici, si potrebbe ulteriormente immaginare che il gioco semplice sia anche un gioco di maggioranza semplice, in cui tutti gli individui hanno un peso pari ad uno, e che la decisione che verrà adottata sia quella sostenuta da una coalizione vincente.

La regola o metodo decisionale della maggioranza della metà più uno (d'ora in poi semplicemente della *maggioranza*), è forse la più ovvia da prendere in considerazione tra le procedure per aggregare le preferenze individuali; i suoi pregi comprendono la semplicità, l'uguaglianza e, non trascurabile, il peso della tradizione. Tra i suoi difetti potremmo invece indicare la possibilità che nessuna decisione venga presa, qualora cioè i consensi degli n individui siano divisi esattamente a metà sulle due decisioni. Ma a tale regola possiamo muovere una critica ben più profonda. La regola della maggioranza è fondamentalmente una procedura per ordinare coppie di alternative. Quando però bisogna ordinare più di due alternative, la regola della maggioranza incontra una difficoltà di cui il marchese di Condorcet si rese conto già circa 200 anni or sono.

8.1 Paradosso di Condorcet

All'inizio di questo capitolo, abbiamo introdotto il termine "preferenze" attribuendo a tale termine il suo significato comune. In realtà, nell'ambito della teoria economica del consumatore, di cui, in parte, stiamo discutendo, e più in generale nell'ambito delle scelte sociali, con il termine "sistema di preferenze" si intende un oggetto definito come segue

Definizione 8.1 [Preferenze deboli]

Dato un insieme Γ, un *sistema di preferenze* su Γ è definito come un **preordine totale** [2] su Γ, cioè una relazione **riflessiva, transitiva** e **totale** su Γ. Indichiamo tale relazione con il simbolo $\succeq$.

■

L'interpretazione è la seguente: dati due elementi $x, y \in \Gamma$, $x \succeq y$ significa che l'elemento x è preferito o indifferente (si dice anche "debolmente preferito") all'elemento y. Questa relazione, detta anche di *preferenza debole*, è ciò che d'ora in avanti utilizzeremo per ordinare le alternative sulla base dei "gusti" di un decisore. Per l'appunto, detto i il nome di un dato individuo, indicheremo con $\succeq_i$ il suo personale sistema di preferenze.

Esercizio 8.1 *Si provi a definire la relazione di indifferenza $\sim$ a partire dalla relazione di prefernza debole.*

Esercizio 8.2 *La relazione di indifferenza $\sim$, è una relazione di equivalenza?*

Da un sistema di preferenze deboli come definite in 8.1, possiamo definire un sistema di *preferenze strette* così definite:

Definizione 8.2 [Preferenze strette]
Dato un insieme Γ e un preordine totale $\succeq$ (sistema di preferenze deboli) su Γ, definiamo la relazione $\succ$ *sistema di preferenze strette* su Γ nel modo seguente:

$$\forall x, y \in \Gamma \qquad x \succ y \Leftrightarrow \Big(x \succeq y \quad e \quad non(y \succeq x)\Big) \tag{42}$$

■

L'interpretazione in questo caso è la seguente: dati due elementi $x, y \in \Gamma$, $x \succ y$ significa che l'elemento x è strettamente preferito all'elemento y, non è possibile cioè, tramite questa relazione, catturare la possibilità che due elementi di Γ siano indifferenti per un dato individuo. Come prima, detto i il nome di un dato individuo, indicheremo con $\succ_i$ il suo personale sistema di preferenze strette.

Esercizio 8.3 *Si dimostri che $\succ$ è asimmetrica e negativamente transitiva. Riportiamo per comodità sia la definizione di asimmetria che di transitività negativa:*
asimmetria*: non esiste $x, y \in X \quad t.c. \quad (x \succ y \quad e \quad y \succ x)$*
transitività negativa*: $\forall x, y, z \in X \quad [x \succ y \Rightarrow (x \succ z \text{ oppure } y \succ x)]$*

[2] Si ricordi che una relazione ρ tra gli elementi di un insieme X è un *ordine totale* se tale relazione è un preordine totale su X che sia anche antisimmetrico, cioè non esistano elementi $x,\ y \in X$ con $x \neq y$ tali che $x\rho y$ e $y\rho x$

Esercizio 8.4 *Dimostrare che* $x \succ y \Rightarrow x \succeq y$.

Esercizio 8.5 *Data una relazione* $\succ$ *su* Γ *asimmetrica e negativamente transitiva, si definisca la relazione* $\succeq$ *sempre su* Γ *come* $non(x \succ y) \Rightarrow (y \succeq y)$ *per ogni coppia di elementi* $x, y \in \Gamma$. *Provare che* $\succeq$ *è un preordine totale.*

Esercizio 8.6 *Sia* $\succeq$ *un preordine totale su* Γ. *Sia invece* $\succ$ *una relazione su* Γ *definita come in 8.2. Si consideri inoltre una relazione* $\sqsupseteq$ *tale che per ogni* $x, y \in \Gamma$ *si abbia* $\Big(x \sqsupseteq y \Rightarrow non(y \succ x)\Big)$.

Le relazioni mostrate, che alla luce di quanto vedremo in questo paragrafo potrebbero sembrare un'inutile appesantimento formale, ci torneranno molto utili nei paragrafi che seguiranno. È bene, quindi, riuscire a prendere confidenza con il loro utilizzo a partire dai semplici esempi presenti in questo paragrafo.
Definiamo formalmente ciò che d'ora in poi chiameremo *regola di determinazione delle scelte collettive* (o, più brevemente, regola di scelta collettiva) a partire dall'insieme di preferenze di n individui

Definizione 8.3 Dato un insieme N di n individui e l'insieme $\mathcal{P}$ dei preordini totali su un insieme di alternative Γ, definiamo *regola di determinazione delle scelte collettive*, una funzione

$$P : \underbrace{\mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \ldots \times \mathcal{P}}_{n \text{ volte}} \rightarrow \mathcal{P} \tag{43}$$

Chiameremo *sistema di preferenze collettivo* $\succeq_N$ il valore che la funzione P assume in corrispondenza della n-upla di prefernze $(\succeq_i)_{i \in N}$ su Γ.
Un elemento $(\succeq_i)_{i \in N}$ di $\mathcal{P}^n$ verrà detto profilo di preferenze.

■

Esempio 8.1 *Si consideri un insieme* N *di* n *individui e l'insieme di alternative* Γ. *Il meccanismo per il quale si sceglie come sistema di preferenze collettivo* $\succeq_N$ *su* Γ *il sistema di preferenze individuale su* Γ *del giocatore corrispondente al numero riportato su una pallina estratta a caso da un urna contente* n *palline numerate da* 1 *a* n, *è una regola per la determinazione delle scelte sociali.*

Esercizio 8.7 *Quante sono le regole per la determinazione delle scelte sociali con tre agenti e tre alternative?*

Non tutte le regole saranno accettabili. Varie sono le restrizioni che si possono effettuare. Alcune le abbiamo già fatte implicitamente: primo, il preordine collettivo dipende dai preordini individuali (anzi, dai preordini di

tutti gli agenti); secondo, che anche il sistema di preferenze collettivo sia un preordine totale; terzo, che tale regola "funzioni" a partire da qualsiasi preordine totale che abbiano gli agenti.
Si supponga che un comitato composto da tre individui, $N = \{a, b, c\}$, debba scegliere tra tre alternative, $\Gamma = \{x, y, z\}$. Si supponga che il sistema di preferenze di a sia tale che $x \succeq_a y$, $x \succeq_a z$ e $y \succeq_a z$ ma $non(y \succeq_a x)$, $non(z \succeq_a x)$ e $non(z \succeq_a y)$. In altri termini le preferenze di a sono rappresentate dal sistema di preferenze strette $x \succ_a y \succ_a z$ (cioè l'individuo a preferisce strettamente che sia nominato l'alternativa y all'alternativa z e l'alternativa x a entrambe le alternative y e z). Il sistema di preferenze di b è $y \succ_b z \succ_b x$ e quello di c è $z \succ_c x \succ_c y$. In questo caso, la votazione a maggioranza tra coppie di alternative produce un ciclo: x sconfigge y, y sconfigge z e z sconfigge x. Questo ciclo di votazioni è l'esempio più semplice di paradosso di Condorcet.
Che cosa è successo? Semplicemente ci siamo resi conto che il meccanismo della maggioranza semplice, che pone $k \succeq_N h$ per ogni $h, k \in \Gamma$ se il numero di persone che preferiscono strettamente k ad h è maggiore o uguale di quelle che preferiscono strettamente h a k, non è una regola di determinazione delle scelte collettive su Γ a partire dalle preferenze degli individui in N così come l'abbiamo definita. Si verifica infatti facilmente che $\succeq_N$ non è transitiva. Basta verificare, come mostrato in precedenza in maniera intuitiva, che

$$\left.\begin{array}{l} x \succ_a y \succ_a z \\ y \succ_b z \succ_b x \\ z \succ_c x \succ_c y \end{array}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad y \succ_N x, \quad z \succ_N y, \quad x \succ_N z$$

(Si noti che $y \succ_N x \Rightarrow y \succeq_N x$, $z \succ_N x \Rightarrow z \succeq_N x$ e $x \succ_N z \Rightarrow \text{non}(z \succeq_N x)$)
Gli studiosi di scienze politiche hanno identificato molti casi storici di cicli di votazioni. William H. Riker, dell'Università di Rochester, sostiene per esempio che l'adozione del 17° Emendamento della Costituzione degli Stati Uniti, che prevede l'elezione diretta dei senatori degli Stati Uniti, fu ritardata per dieci anni da manovre parlamentari basate su cicli di votazione fra lo *status quo* (la nomina dei senatori da parte dell'assemblea legislativa dello Stato) e due versioni dell'emendamento.
Quando sono possibili più di due alternative, è necessario qualche principio nuovo per produrre delle scelte fra coppie ordinate di alternative. I modelli di preferenza che inducono il paradosso della votazione creano difficoltà dal momento che ogni alternativa perde (o vince) nei confronti di un'altra.

Un altro metodo per procedere a una scelta fra coppie ordinate di alternative è di stabilire un'agenda in cui venga specificato in quale ordine le alternative saranno prese in considerazione. L'agenda, per esempio, potrebbe richiedere una votazione iniziale per z contro y, seguita da una seconda fase in cui il vincitore della precedente sarebbe contrapposto a x. Secondo questa agenda il nostro comitato di tre membri voterebbe prima per z contro y e alla seconda votazione z sconfiggerebbe x. Indubbiamente questo metodo non dà origine a cicli che impediscono la scelta di una delle alternative. Non solo: l'agenda fornisce anche un preordine totale collettivo sulle alternative. In altri termini il metodo dell'agenda, al contrario del metodo della maggioranza semplice (cioè senza agenda) è in effetti una regola di determinazione delle scelte collettive come definita in 8.3. Si noti che in tutto ciò si assume che sia fissata un'agenda "a priori", nel senso che essa sia indipendente dalle preferenze possedute dagli individui. È facile verificare che in questa situazione ognuna delle tre agende possibili dà come vincitrice l'alternativa presa in considerazione per ultima: l'agenda determina il risultato. È quindi evidente l'arbitrarietà della scelta di quale alternativa debba essere considerata per ultima. Non solo: un tale metodo si presta molto bene alla manipolazione di chi deve predisporre l'agenda.

Esercizio 8.8 *Si supponga che che l'alternativa z venga confrontata, all'interno del comitato composto dai tre membri precedenti, con l'alternativa y: y sconfiggerà z e l'individuo a sarà scontento. In che misura a può agire sull'agenda (tramite, per esempio, l'introduzione di un emendamento ad una delle due alternative z e y), per ottenere il passaggio della mozione da lui preferita?*

C'è un altro aspetto da esaminare che il meccanismo dell'agenda ci offre: gli agenti possono mentire sulle proprie preferenze per proprio vantaggio. Si consideri ancora l'agenda in cui z viene considerata per ultima (cioè prima avviene il confronto tra x e y e poi, la vincente tra queste due, viene confrontata con z). Se ogni membro del comitato dà ogni volta il proprio voto alla sua vera preferenza, l'alternativa vincente, z, è quella meno gradita da a. Si supponga ora che nella prima votazione a dia invece il voto a y; in tal caso prevale y, che può battere z nella seconda votazione. Con questo stratagemma a blocca la scelta dell'alternativa più sgradita.
Si noti come con due sole alternative, x e y, una votazione a maggioranza non può produrre un ciclo. Un ciclo richiederebbe sia che più della metà dei votanti preferisca strettamente x a y, sia che più della metà dei votanti preferisca strettamente y ad x, il che è chiaramente impossibile. Con tre o più alternative, invece, lo abbiamo visto, si può creare un ciclo. Si potrebbe obiettare che il meccanismo della maggioranza non è l'unico modo per cercare di aggregare le preferenze collettive di una società. È anche vero però che il problema della nascita di un ciclo, o, se vogliamo, il mancato rispetto della transitività da parte dell'ordinamento collettivo, non è l'unico problema che potrebbe sorgere. Come già accennato in precedenza, possiamo fare altre restrizioni sulle regole di determinazione. Per esempio potremmo richiedere che la scelta tra due alternative non sia influenzata dall'ordinamento che le altre alternative hanno in base alle preferenze degli individui

coinvolti. Affronteremo questo aspetto nel prossimo paragrafo

9 Metodo di conteggio di Borda

Abbiamo definito come regola di scelta collettiva (definizione 8.3), una funzione che assegna ad un vettore di sistemi di preferenze individuali un sistema di preferenze per la collettività. D'altra parte, nei discorsi sin qui condotti, abbiamo parlato anche di meccanismi in grado di fornire, dato un vettore di sistemi di preferenze individuali, una singola alternativa, quella cioè che verrà adottata dal consesso. La connessione tra le due funzioni è immediata: data una regola per la scelta di un sistema di preferenze collettive, possiamo determinare quale sarà l'alternativa selezionata dal consesso, ovviamente quella (o quelle, perchè potrebbero essere più di una) che non ha alternative che sono strettamente preferite ad essa nel preordine totale collettivo.
Ad ogni modo, non c'è dubbio che l'informazione che risiede nel sistema di preferenze collettivo sia di più di quella che ci potrebbe interessare qualora volessimo determinare l'alternativa o le alternative preferite dalla collettività. In altri termini, se siamo disinteressati a come la collettività classifica le alternative che, rispetto al preordine totale collettivo, perdono il confronto contro qualche altra alternativa, allora potremmo focalizzare la nostra attenzione unicamente sulle alternative che risultano essere collettivamente preferite alle altre.
Anzi, quello appena scritto sembrerebbe un requisito oltremodo ragionevole da richiedere ad una regola di scelta: se quello che interessa è unicamente l'alternativa preferita (anche se debolmente) a tutte le altre nel sistema di preferenze collettivo, perchè curarsi di come i singoli individui del consesso ordinino le altre alternative nei propri sistemi di preferenza individuali? Eppure non è scontato che una regola di scelta collettiva soddisfi un tale requisito, come vedremo di seguito.

Definizione 9.1 [Metodo del conteggio di Borda]
Dato un insieme di alternative Γ e un consesso decisionale costituito da un insieme N di n individui, il metodo di conteggio di Borda definisce che per ogni agente in N vengano elencati nell'ordine di preferenza gli elementi di Γ e vengano attribuiti il punteggio di 1 all'ultimo (quello che non è strettamente preferito ad alcuna alternativa in Γ), 2 al penultimo e così via.
La somma dei punteggi ottenuti dai vari elementi in Γ fornisce la classificazione collettiva tra le alternative in Γ.

■

Esercizio 9.1 *Provare che il metodo del conteggio di Borda è una regola di scelta collettiva come definita in 8.3.*

Consideriamo il seguente esempio:

Esempio 9.1 *Sia dato un insieme di agenti* $N = \{1, 2, 3\}$ *che possiedono un sistema di preferenze sull'insieme delle alternative (o candidati)* $\Gamma = \{a, b, c, d, e, f\}$. *I sei sistemi di preferenze sono i seguenti:*
$a \succ_1 b \succ_1 c \succ_1 d \succ_1 e \succ_1 f$
$d \succ_2 c \succ_2 b \succ_2 e \succ_2 a \succ_2 f$
$d \succ_3 c \succ_3 b \succ_3 f \succ_3 a \succ_3 e$
La regola di Borda fornisce i punteggi rappresentati nella seguente tabella

	a	b	c	d	e	f
1	6	5	4	3	2	1
2	2	4	5	6	3	1
3	2	4	5	6	1	3
totale	10	13	14	15	6	5

Come si vede dalla classificazione totale, l'alternativa d *è quella preferita collettivamente.*
Ma se le preferenze di 1 *cambiano per quel che riguarda il confronto tra le alternative* b *e* c *(cioè le preferenze di* 1 *diventano* $c \succ_1 b \succ_1 a \succ_1 d \succ_1 e \succ_1 f$*) e tutti gli altri sistemi di preferenze rimangono inalterati, il nuovo conteggio di Borda diventa:*

	a	b	c	d	e	f
1	4	5	6	3	2	1
2	2	4	5	6	3	1
3	2	4	5	6	1	3
totale	8	13	16	15	6	5

La regola di Borda permette che un cambio di ordine nelle preferenze individuali di 1*, tra due alternative che non erano comunque quelle con il maggior punteggio nella classificazione totale precedente, modifichi la scelta dell'alternativa da parte della collettività dei tre agenti: l'alternativa* c *è ora preferita collettivamente all'alternativa* d*, preferita dal sistema di preferenza collettivo ottenuto in precedenza.*

Abbiamo visto che un cambio nell'ordinamento di preferenze individuale tra due alternative si può ripercuotere sulla classificazione di una terza alternativa, diversa dalle precedenti, da parte di una regola di scelta collettiva. In particolare, nell'esempio precedente, quella che era l'alternativa preferita dalla collettività ha perso la propria posizione di predominanza in seguito al cambiamento dei gusti di un individuo su altre due alternative. Ma la regola di scelta collettiva, come già ripetutamnte osservato, fornisce un sistema di

preferenze. E allora è naturale pensare che quanto sia stato detto sin qui sia estendibile a qualsiasi alternativa, non necessariamente quella preferita nell'ordinamento di preferenze collettivo.
Potremmo cioè richiedere ulteriormente che l'ordinamento collettivo di qualsiasi coppia di alternative dipenda solo dagli ordinamenti individuali di quelle due alternative. Date cioè due alternative x e y, finchè resta invariato l'ordinamento di ciascun individuo relativamente a queste due alternative, potremmo richiedere che resti immutato anche l'ordinamento collettivo di x ed y. Vediamo un altro esempio in cui la regola di Borda non rispetta la suddetta proprietà, questa volta per quel che riguarda una classificazione intermedia:

Esempio 9.2 *Riprendiamo l'esempio del comitato descritto nel precedente paragrafo. Possiamo rappresentare la situazione delle preferenze secondo il metodo di Borda per mezzo della seguente tabella (si ricorda che* $x \succ_a y \succ_a z$, $y \succ_b z \succ_b x$ *e* $z \succ_c x \succ_c y$*):*

	x	y	z
a	3	2	1
b	1	3	2
c	2	1	3
totale	6	6	6

Quindi il comitato risulta essere indifferente tra le tre alternative (N.B.: la transitività delle preferenze è rispettata). Si supponga che le preferenze di a *cambino da* $x \succ_a y \succ_a z$ *in* $x \succ_a z \succ_a y$*, possiamo rappresentare la situazione delle preferenze secondo il metodo di Borda per mezzo della seguente tabella:*

	x	y	z
a	3	1	2
b	1	3	2
c	2	1	3
totale	6	5	7

Sebbene nessun votante abbia cambiato il proprio ordinamento di x *e* y*, la votazione basata sul metodo del conteggio di Borda dà ora un ordinamento collettivo in cui* x *è preferito a* y*, in quanto* x *continua a ricevere* 6 *punti, mentre* y *ora ne ha solo* 5*. Con tale regola di scelta, quindi, l'ordinamento collettivo di* x *e* y *dipende pertanto non solo dal modo in cui gli individui ordinano* x *e* y*, ma anche dalla posizione relativa di altre alternative, quali* z*.*

Chiameremo *Indipendenza dalle alternative irrilevanti (IIA)* la proprietà per la quale la classificazione collettiva di due alternative dipende solo dalla loro posizione relativa nei sistemi di preferenze dei vari individui e non da considerazioni sulle altre alternative. Si noti che una tale proprietà limita le

informazioni individuali necessarie per determinare l'ordinamento collettivo di una coppia di alternative: questo può essere un vantaggio in quelle situazioni in cui è difficile e costoso stabilire gli ordinamenti individuali.
Come avevamo fatto per il paradosso di Condorcet, mostrando che l'ordinamento fornito dal meccanismo della maggioranza non soddisfa la proprietà della transitività che un sistema di preferenze dovrebbe avere per definizione, possiamo formalizzare la proprietà IIA nelle seguente definizione, e successivamente indicare come questa non sia rispettata (cosa che per altro abbiamo già visto negli esempi precedenti) dal metodo del conteggio di Borda.

Definizione 9.2 [Indipendenza dalle Alternative Irrilevanti (IIA)]
Dato un insieme N di n agenti, un insieme di alternative Γ e una regola di scelta collettiva P, diciamo che tale regola per la scelta collettiva P è *indipendente dalle alternative irrilevanti* se
$\forall x, y \in \Gamma \quad \Big([\forall h \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad (x \succeq_h y) \Leftrightarrow (x \sqsupseteq_h y)] \Rightarrow [(x \succeq_N y) \Leftrightarrow (x \sqsupseteq_N y)] \Big) \qquad \forall\ (\succeq_h)_{h\in N}, (\sqsupseteq_h)_{h\in N} \in \mathcal{P}^n$
dove $\succeq_N$ e $\sqsupseteq_N$ sono gli ordinamenti collettivi ottenuti da P a partire rispettivamente da $(\succeq_h)_{h\in N}$ e $(\sqsupseteq_h)_{h\in N}$.

■

Rivediamo alla luce di questa definizione l'esempio 9.2. Si ha:

$$\left.\begin{array}{l} x \succ_a y \succ_a z \\ y \succ_b z \succ_b x \\ z \succ_c x \succ_c y \end{array}\right\} \Rightarrow \Big(x \text{ pti } 6,\ y \text{ pti } 6,\ z \text{ pti } 6\Big) \Rightarrow \Big(y \sim_N x, z \sim_N y, x \sim_N z\Big)$$

$$\left.\begin{array}{l} x \sqsupset_a z \sqsupset_a y \\ y \sqsupset_b z \sqsupset_b x \\ z \sqsupset_c x \sqsupset_c y \end{array}\right\} \Rightarrow \Big(x \text{ pti } 6,\ y \text{ pti } 5,\ z \text{ pti } 7\Big) \Rightarrow \Big(x \sqsupset_N y, z \sqsupset_N y, z \sqsupset_N y\Big)$$

Si noti, rispetto alla definizione 9.2, che $(x \succeq_a y,\ y \succeq_b x,\ x \succeq_c y)$ e $(x \sqsupseteq_a y,\ y \sqsupseteq_b x,\ x \sqsupseteq_c y)$ cioè le due alternative x, y sono classificate sullo stesso identico modo da ciascun agente, nei due diversi profili di preferenze considerati.
Quindi la definizione 9.2 non è evidentemente rispettata dalla regola di Borda.
Ancora una considerazione sulla IIA che approfondiremo nel seguito. Così come il meccanismo di maggioranza con agenda si presta a manipolazione, le regole di scelta sociale che non rispettano la IIA, in un senso abbastanza analogo, soffrono dello stesso problema. Si consideri l'esempio 9.1. La computazione dei punteggi totali è basata sul fatto che sono conosciuti i sistemi di prefernza individuale tra i vari giocatori. Ci si potrebbe chiedere da dove provenga tale informazione. È evidente che se l'informazione proviene dagli individui, non c'è nessun motivo per gli individui di dire la verità se non quello che da essa possa provenire la scelta dell'alternativa da loro preferita. Viceversa, se per qualche ragione una dichiarazione falsa può favorirli, se si

suppone che il loro agire sia condizionato dal loro sistema di preferenze sulle alternative, allora essi mentiranno. Se così stanno le cose, e se i sistemi di preferenza individuale sono dedotti dalle dichiarazioni degli agenti, allora il giocatore 1 che ha un sistema di preferenze $a \succ_1 b \succ_1 c \succ_1 d \succ_1 e \succ_1 f$ (che insieme agli altri due sistemi di preferenze determinerebbe la scelta dell'alternativa d), dichiarerà di possedere il sistema di preferenze $c \succ_1 b \succ_1 a \succ_1 d \succ_1 e \succ_1 f$, che determinerà collettivamente la scelta dell'alternativa c, la quale, nel sistema di preferenze individuale di 1, è preferita alla d.

Esercizio 9.2 *Cosa succede se in un meccanismo analogo alla regola di Borda n individui devono fissare loro il punteggio (ad esempio su una scala da* 0 *a* 100*)? Cosa fareste voi? Tale meccanismo è una regola di determinazione della scelta collettiva? Soddisfa la IIA? Conviene mentire? E se sì , come?*

Esercizio 9.3 *Il Consiglio di Sicurezza delle Nazioni Unite consiste di cinque stati permanenti e dieci altri membri. Le mozioni devono essere approvate da nove membri, tra i quali devono essere inclusi tutti e cinque i membri permanenti.*
Tale meccanismo di scelta è una regola di determinazione delle scelte sociali? Produce cicli?

10 Teorema di Arrow

Nel paragrafo introduttivo avevamo indicato come molto plausibile che, in un consesso in cui tutti i partecipanti sono d'accordo, la scelta collettiva dell'alternativa ricada sull'alternativa preferita da tutti. Analogamente possiamo immaginare che, date due alternative qualunque x e y, se ogni individuo preferisce x a y, l'ordinamento collettivo debba mettere x al di sopra di y (a prescindere dalla posizione delle due alternative rispetto tutte le altre). Chiameremo questa condizione come *condizione dell'unanimità.* Se si accetta l'opinione secondo la quale l'ordinamento di una società dovrebbe riflettere le preferenze dei propri membri, è difficile trovare da ridire sulla condizione dell'unanimità. Definiremo quindi:

Definizione 10.1 [Unanimità]
Dato un insieme N di n agenti, un insieme di alternative Γ e una regola di scelta collettiva P, diciamo che tale regola per la scelta collettiva P rispetta la *condizione dell'unanimità* se
$\forall x, y \in \Gamma,\ \forall\ (\succeq_h)_{h\in N} \in \mathcal{P}^n \quad \Big([\forall h \in \{1,2,\dots,n\} \quad (x \succeq_h y)] \Rightarrow (x \succeq_N y)\Big)$
dove $\succeq_N$ è l'ordinamento collettivo ottenuto da P a partire da $(\succeq_h)_{h\in N}$.

■

Esercizio 10.1 *Trovare una regola di determinazione della scelta collettiva che non rispetti la condizione dell'unanimità.*

Una regola che sicuramente rispetta la condizione dell'unanimità è qualsiasi regola di scelta collettiva che rispetti la *condizione di dittatorialità.* Una regola dittatoriale è una regola che, dato un insieme di sistemi di preferenze individuali qualunque, determina un sistema di preferenze collettive identico al sistema di preferenze di un dato singolo individuo. È così giustificata la relazione tra le due condizioni: una regola dittatoriale è anche unanime perchè quando tutti gli individui sono d'accordo tra loro, sono necessariamente d'accordo anche con il dittatore, che fa parte dell'insieme di tutti gli individui. Formalmente:

Definizione 10.2 [Dittatorialità]
Dato un insieme N di n agenti, un insieme di alternative Γ e una regola di scelta collettiva P, diciamo che tale regola per la scelta collettiva P rispetta la *condizione di dittatorialità* se
$\exists \tilde{h} \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tale che $P(\succeq_1, \ldots, \succeq_{\tilde{h}}, \ldots, \succeq_n) = \succeq_{\tilde{h}} \quad \forall \quad (\succeq_h)_{h \in N} \in \mathcal{P}^n$
cioè $\succeq_{\tilde{h}}$, che rappresenta il sistema di preferenze del giocatore $\tilde{h}$, coincide con l'ordinamento collettivo $\succeq_N$ ottenuto da P a partire da $(\succeq_h)_{h \in N}$.

■

Ci sorpenderemmo se fosse vero il contrario, cioè che ogni regola di scelta collettiva che rispetti la condizione di unanimità rispetti anche la condizione di dittatorialità.

Esercizio 10.2 *Trovare una regola di scelta collettiva che rispetti la condizione dell'unanimità ma non quella di dittatorialità.*

Non c'è invece modo di evitare la "sorpresa" che deriva dall'enunciato del teorema di Arrow (1951)

Teorema 10.1 (Arrow (1951)) *Dato un insieme N di n agenti e un insieme di alternative Γ con almeno tre elementi, una regola di determinazione della scelta collettiva P che rispetti la condizione IIA e la condizione dell'unanimità è anche dittatoriale.*
Dim.
Dimostreremo il teorema attraverso una sequenza di quattro passaggi fondamentali. Nel passo 1) proveremo che se un profilo di preferenze indivuali rispondente alle condizioni espresse nell'enunciato è tale per cui ogni individuo pone una data alternativa in cima o in fondo al proprio ordinamento individuale, allora tale alternativa occuperà necessariamente, nell'ordinamento collettivo, una posizione di testa o di coda. Sfrutteremo questa proprietà per dimostrare al passo 2) l'esistenza di un individuo in grado di far cambiare la classificazione di un'alternativa dalla posizione peggiore in un particolare ordinamento collettivo a quella migliore. Al passo 3) mostreremo che l'individuo di cui dimostriamo l'esistenza al passo 2) è in grado di determinare la classificazione collettiva tra molte coppie di alternative, cioè è dittatore per quel che riguarda l'ordinamento collettivo di un certo numero

di alternative. Al passo 4), infine, mostreremo come, la costruzione ottenuta dai passi precedenti, determini l'esistenza di un dittatore così come definito nella definizione 10.2.
Per alleggerire le notazioni, indicheremo $P\Big((\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ *con* $\succeq_N$*, laddove non ci sia rischio di confusione.*
passo 1)
Dimostriamo per prima cosa che per ogni n*-upla di sistemi di preferenza* $(\succeq_i)_{i\in N}$ *tale che esiste* $x \in \Gamma$ *per cui, per ogni* $i \in N$*, vale* $(x \succeq_i y\ \forall\ y \in \Gamma,\ y \neq x)$ *oppure* $(y \succeq_i x\ \forall\ y \in \Gamma,\ y \neq x)$*, si ha che* $\succeq_N$ *è tale per cui* $(x \succeq_N y\ \forall\ y \in \Gamma)$ *oppure* $(y \succeq_N x\ \forall\ y \in \Gamma)$.
Supponiamo al contrario che esista un vettore $(\succeq_i)_{i\in N}$ *tale che esista* $x \in \Gamma$ *per cui, per ogni* $i \in N$*, vale* $(x \succeq_i y,\ \forall\ y \in \Gamma,\ y \neq x)$ *oppure* $(y \succeq_i x,\ \forall\ y \in \Gamma,\ y \neq x)$ *ma che esistano* $a,\ b \in \Gamma$, $a \neq b$, $a \neq x$, $b \neq x$ *tali che* $a \succ_N x$ *e, contemporaneamente,* $x \succ_N b$.
Grazie alla indipendenza dalle alternative irrilevanti, possiamo supporre che la classificazione collettiva $a \succ_N x$ *e* $x \succ_N b$ *rimanga tale anche quando ogni individuo modificasse i propri sistemi di preferenza in maniera tale per cui per ogni* $i \in N$ *si avesse* $b \succeq_i a$ *e fosse inalterata la classificazione di* x *rispetto le altre alternative. La transitività di* $\succ_N$ *implicherebbe che* $a \succ_N b$*, ma per l'unanimità di* $\succeq_N$ *si dovrebbe avere* $b \succeq_N a$*, che produce una contraddizione.*
passo 2)
Consideriamo un profilo di preferenze $(\succeq_i)_{i\in N}$ *tale che esista un'alternativa* $x \in \Gamma$ *per cui* $y \succeq_i x,\ \forall\ \ i \in N$ *e* $\forall\ y \in \Gamma,\ y \neq x$*. Per l'unanimità di* P *dovrà essere* $y \succeq_N x,\ \forall\ y \in \Gamma,\ y \neq x$.
Si indichi una successione qualsiasi di giocatori $s = 1, 2, \ldots, n$ *e si supponga che ciascun giocatore* $i \in N$ *cambi, uno dopo l'altro secondo la successione* s *e partendo dal giocatore 1 nella successione, il proprio ordinamento ponendo* $x \succeq_i y,\ \forall\ y \in \Gamma,\ y \neq x$ *e lasciando inalterate le altre classificazioni tra alternative. Sia* $j(x) \in N$ *il primo giocatore nella successione* s *per il cui cambiamento si abbia la modifica della classificazione collettiva tale per cui non sia più vero che* $y \succeq_N x,\ \forall\ y \in \Gamma,\ y \neq x$ *(per l'unanimità un cambio deve avvenire almeno quando sia stato effettuato il cambiamento nelle preferenze individuali da parte dell'n-esimo giocatore nella successione* s*). Si indichi con* Π *l'n-upla di sistemi di preferenze individuali che si hanno nel momento in cui ha cambiato il proprio sistema di preferenze il giocatore precedente a* $j(x)$ *nella successione* s*. Sia invece* Π' *l'n-upla di sistemi di preferenze individuali che si hanno nel momento in cui ha cambiato il proprio sistema di preferenze il giocatore* $j(x)$*. Dal momento che* $\succeq'_N = P(\Pi')$ *è tale per cui non è vero che* $y \succeq'_N x,\ \forall\ y \in \Gamma,\ y \neq x$*, deduciamo da quanto dimostrato nel passo 1) (essendo comunque tutti i sistemi di preferenze individuali tali per cui* x *è in cima o in fondo agli ordinamenti) che* $x \succeq'_N y$*,* $\forall\ y \in \Gamma,\ y \neq x$*.*

passo 3)
Dimostriamo ora che $j(x)$ determina la classificazione tra qualsiasi coppia di alternative $c, d \in \Gamma$, $c \neq d$, $c \neq x$, $d \neq x$, non coinvolgente x del passo precedente. Si costruisca a partire dall'n-upla Π' l'n-upla Π'' tale che il sistema di preferenze individuali di $j(x)$ rimanga inalterato salvo l'unica differenza per cui $c \succeq_{j(x)} x \succeq_{j(x)} d$, e che gli altri giocatori abbiano qualunque sistema di preferenza con l'unico vincolo che x occupi la stessa posizione (di alternativa migliore o peggiore) che aveva in ciascun sistema di preferenza individuale nell'n-upla Π'. Per la IIA, $\succeq''_N = P(\Pi'')$ è tale che $c \succeq''_N x$ (dal momento che la relazione di preferenza tra c e x è esattamente come era in Π), e $x \succeq''_N d$ (dal momento che la relazione di preferenza tra d e x è esattamente come era in Π'). Per la transitività di $\succeq''_N$, $c \succeq''_N d$. Per la IIA di P, quindi, un qualsiasi sistema di preferenza sociale determinato da P su ogni coppia di preferenze diverse da x deve essere d'accordo con la preferenza di $j(x)$ sulla stessa coppia.
passo 4)
Dimostriamo infine che $j(x)$ è un dittatore.
Data ogni coppia di alternative $e, f \in \Gamma$ con $e \neq f$, possiamo prendere una qualsiasi altra alternativa (si ricordi che le alternative sono $p \geq 3$) $g \in \Gamma$, $g \neq x$, differente dalle precedenti e metterla in fondo all'ordinamento di ciascun giocatore. Quindi esisterà un giocatore $j(g) \in N$ che, per il passo 3), sarà in grado di determinare la relazione di preferenza sociale collettiva tra ogni coppia di alternative $e, f \in \Gamma$, $e \neq f$, $e \neq g$, $f \neq g$. Questo significa che, per $p > 3$, $j(x)$ e $j(g)$ saranno entrambi in grado di determinare la relazione di preferenza collettiva sulle stesse coppie di alternative non coinvolgenti rispettivamente x e g. Poichè $x \neq g$, se ne deduce perciò che deve essere $j(x) = j(g)$ (per $p = 3$ basta considerare tre individui in grado di influenzare la preferenza sulle tre coppie di alternative diverse possibili e si vede che i tre individui devono essere lo stesso individuo). ■

Quello che questo teorema ci dice è che se cerchiamo una regola di determinazione della scelta sociale che rispetti la condizione di IIA e dell'unanimità e in più non sia dittatoriale, ebbene siamo destinati a fallire nella nostra ricerca. Per questo motivo il teorema di Arrow è anche detto *di impossibilità*. In altre parole, tutte le proprietà che abbiamo visto sino a questo momento, a partire da quelle che definiscono la relazione di preferenza debole (che è riflessiva, transitiva e totale), passando per la definizione di regola per la determinazione delle scelte sociali, alla IIA e unanimità, sono requisiti di per se allettanti che però, assieme, sono perniciosi.
La dittatorialità di una regola per la determinazione delle scelte sociali è determinata a partire da alcuni requisiti apparentemente modesti. Ci si potrebbe chiedere se effettivamente, ad un'analisi più attenta, questi requi-

siti continuino ad apparire modesti e soprattutto se ci sono requisiti meno "esigenti" di quelli richiesti da Arrow che evitino l'infelice conclusione del suo teorema.
Per esempio, nella definizione di regola per la determinazione delle scelte sociali, avevamo implicitamente imposto che la regola determinasse un preordine totale collettivo a partire da qualsiasi n-upla di preordini totali individuali. Questo requisito, che è implicito nella definizione di regola come la funzione definita in 8.3, spesso è visto come un requisito a parte e viene denominato *portata universale*. In realtà, tale requisito potrebbe essere indebolito, richiedendo che la funzione sia definita su un sottoinsieme di tutti i profili di preferenza individuali e sostenendo che non tutte le configurazioni logicamente possibili di ordinamenti individuali sono ugualmente probabili. Poichè alcune configurazioni possono essere estremamente improbababili, esigere che una regola aggreghi in maniera coerente ogni configurazione di sistemi individuali possibile in un ordinamento collettivo, sembra un presupposto inutilmente troppo forte.
La strategia più comune nell'indebolire questo requisito è stata quella di concentrarsi su una procedura particolare (nell'esempio che vedremo la regola della maggioranza) e di cercare restrizioni che permettano di eliminare quelle configurazioni di preferenze individuali che determinano preferenze collettive intransitive.
Una delle più famose restrizioni non banali è l'assunzione di preferenze con un solo picco, indicata negli anni quaranta dall'economista inglese Duncan Black. Si ha assunzione di preferenze con un solo picco quando tutti gli individui valutano delle alternative in base ad un unico criterio e, in qualsiasi scelta fra alternative prese a coppie, ogni individuo vota per l'alternativa più vicina all'alternativa maggiormente preferita. Ogni individuo, per esempio, potrebbe ordinare dei candidati in base alla loro maggiore o minore vicinanaza alla propria posizione nello spettro politico che va dalla Sinistra alla Destra.

Esempio 10.1 *Supponiamo che l'insieme dell'alternative sia costituto da tre candidati* $\{x, y, z\}$ *in cui* x *è più di Sinistra di* y *e* y *è più di Sinistra di* z. *Un consesso con assunzione di preferenze con un solo picco che comprende individui di Sinistra (con preferenze* $\succeq_S$ *tali per cui* $x \succeq_S y \succeq_S z$*), del Centro (con preferenze* $\succeq_C$ *tali per cui* $y \succeq_C x \succeq_C z$ *oppure* $y \succeq_C z \succeq_C x$*) e di Destra (con preferenze* $\succeq_D$ *tali per cui* $z \succeq_D y \succeq_D x$*), non potrebbe comprendere individui per i quali l'alternativa di mezzo è messa al di sotto dei due estremi (*$x \succeq z \succeq y$ *oppure* $z \succeq x \succeq y$*).*

Esercizio 10.3 *Il metodo della maggioranza applicata a consessi in cui gli agenti hanno preferenze con un solo picco determina il problema della creazione di cicli? Tale metodo è in questo caso una regola per determinazione delle scelte sociali? Soddisfa la IIA e l'unanimità? È anche dittatoriale?*

Se fosse possibile supporre che l'assunzione di preferenze ad un solo picco regga all'atto pratico, gli elementi a favore della regola della maggioranza sarebbero convincenti. Di solito però le persone ordinano le alternative in base ad una molteplicità di criteri e quindi l'assunzione di preferenze con un solo picco non reggerebbe alla prova in molti contesti reali.

11 Funzioni di scelta

La portata del teorema di Arrow è indiscutibile: se una regola per la determinazione della scelta collettiva risponde ad alcune proprietà indubbiamente ragionevoli per quel che riguarda i sistemi di preferenza collettiva che essa determina, purtroppo tale regola si porta dietro una proprietà altrettanto spiacevole, la dittatorialità. D'altro canto, abbiamo anche osservato come sia cosa ben diversa un meccanismo in grado di fornire un sistema di preferenze collettivo sulle alternative da un meccanismo che determini esclusivamente una o più alternative preferite dalla collettività a tutte le altre disponibili. In effetti si potrebbe sperare che il pessimismo legato al risultato mostrato dal teorema di Arrow possa in qualche modo essere ridotto qualora ci si accontenti di meno (poco o molto meno dipende dal contesto), cioè non ci si curi di come la società ordini collettivamente le alternative che sono preferite da altre.
In realtà stiamo facendo di più che un semplice ridimensionamento degli obiettivi. Cercheremo di introdurre concetti utili per risolvere quei problemi in cui più individui si trovano ad integire per la scelta di una o più alternative tra quelle disponbili in un dato insieme, alternative su cui gli individui hanno dei personali sistemi di preferenze. Il problema ha un risvolto molto complesso: stiamo entrando in maniera più incisiva nell'ambito della ricerca che studia l'analisi di meccanismi per la scelta sociale, tenuto conto della realtà in cui esse vogliono essere messe in pratica e dell'interazione tra gli individui che ne può scaturire. Quest'aspetto, che nei termini appena espressi lascia molti interrogativi, sarà il tema centrale del prossimo paragrafo, dedicato ai problemi di implementazione. Quello che mostreremo in questo paragrafo, invece, è volto alla presentazione di alcuni risultati basilari proprio per l'argomento trattato nel paragrafo sulla teoria dell'implementazione. A questo scopo definiamo una *corrispondenza* [3] *per la scelta sociale* come segue:

Definizione 11.1 [Corrispondenza per la scelta sociale]
Sia N un insieme di n agenti e sia A un insieme di alternative. Chiamiamo $\mathcal{P}$ l'insieme dei sistemi di preferenze deboli su A. Sia $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$. Si definisce una *corrispondenza per la scelta sociale (CSS)* una corrispondenza definita

[3] Dati due insiemi A e B, chiameremo corrispondenza $C : B \rightrightarrows A$ una legge che ad ogni elemento di B associa un sottoinsieme non vuoto di A.

come segue

$$C : \mathcal{Q}^n \rightrightarrows A$$

a valori nei sottoinsiemi di A diversi dall'insieme vuoto.

$\blacksquare$

Una corrispondenza per la scelta sociale seleziona, dato un sistema di preferenze di n giocatori, un insieme di alternative. Se l'insieme di alternative determinato dalla corrispondenza è sempre costituito da un singolo elemento, allora possiamo parlare di *funzione per la scelta sociale (FSS)*, che definiamo come $F : \mathcal{Q}^n \to A$.
Si noti che sia le CSS che le FSS sono state definite su un insieme $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$. Questo significa che se vogliamo parlare di risultati generali, cioè di risultati validi per società i cui membri abbiano sistemi di preferenze individuali il più generale possibile (il teorema di Arrow permetteva agli individui di possedere un qualsiasi sistema di preferenze), allora Q deve avvicinarsi il più possibile a P. Per esempio, la formulazione del teorema di Gibbard-Satterthwaite che daremo alla fine di questo paragrafo, prevede che gli individui possano avere come preferenze un qualsiasi ordine totale sulle alternative, in altri termini assumiamo che le loro preferenze deboli rispettino anche la condizione di antisimmetria. Come avevamo fatto parlando delle regole per la determinazione delle scelte sociali, anche per le CSS possiamo pensare ad alcune proprietà ragionevoli. Per esempio possiamo pensare a una condizione di efficienza di una CSS (e quindi anche di una FSS se si considera tale funzione come una corrispondenza a valori in insiemi costituiti da un solo elemento):

Definizione 11.2 [Efficienza delle CSS (FSS)]
Dato un insieme N di n individui, una CSS (FSS) definita su $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ con valori sull'insieme delle alternative A si dice efficiente se

$$C((\succeq_h)_{h=1}^n) \subseteq Par((\succeq_h)_{h=1}^n) \quad \forall\ (\succeq_h)_{h=1}^n \in \mathcal{Q}^n$$

in cui $Par((\succeq_h)_{h=1}^n)$ è l'insieme degli esiti pareto efficienti in senso debole, cioè
$Par((\succeq_h)_{h=1}^n) = \{a \in A \quad t.c. \quad \text{non } \exists\ b \in A\ t.c.\ b \succ_i a \quad \forall\ i \in N\}$

$\blacksquare$

Una CSS (FSS) che sia efficiente, quindi, non selezionerà mai un alternativa a se esiste un'alternativa b strettamente preferita ad a secondo le preferenze di ciascun giocatore.
Ancora, potremmo richiedere a una CSS (FSS) di essere *anonima*, cioè che la scelta delle alternative dipenda in ugual misura dai sistemi di preferenza di tutti gli individui, senza che venga attribuito un maggiore o minor peso alle preferenze di alcuni. Formalmente definiamo questa proprietà come segue:

Definizione 11.3 [Anonimità delle CSS (FSS)]
Dato un insieme N di n individui, una CSS (FSS) definita su $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ con valori sull'insieme delle alternative A si dice *anonima* se per ogni permutazione $\rho : N \to N$ e per ogni $(\succeq_h)_{h\in N} \in \mathcal{Q}^n$

$$C((\succeq_h)_{h\in N}) = C((\succeq_{\rho(h)})_{h\in N}) \tag{44}$$

■

Così come riteniamo ragionevole che una CSS (FSS) non debba dare peso nella scelta dell'alternativa preferita all'identità dell'individuo, possiamo ritenere altrettanto ragionevole che anche il nome delle alternative non debba influenzare la scelta. Quindi diremo che una CSS (FSS) è *neutrale* quando sia rispettata la proprietà definita di seguito:

Definizione 11.4 [Neutralità delle CSS (FSS)]
Dato un insieme N di n individui, una CSS (FSS) definita su $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ con valori sull'insieme delle alternative A si dice *neutrale* se per ogni permutazione $\sigma : A \to A$ e per ogni $(\succeq_h)_{h\in N} \in \mathcal{Q}^n$

$$\sigma\Big(C(\succeq_1, \ldots, \succeq_n)\Big) = C\Big(\succeq_1 (\sigma), \ldots, \succeq_n (\sigma)\Big) \tag{45}$$

dove $\succeq_i (\sigma)$ per ogni $i \in N$ è definita così :
$\forall\, a, b \in A \quad [\sigma(a) \ \succeq_i (\sigma) \quad \sigma(b)] \quad \Leftrightarrow \quad [a \succeq_i b]$

■

Efficienza, anonimità e neutralità sono solo alcune delle proprietà che potremmo richiedere alle CSS (FSS). Ve ne sono altre che trattano in maniera più specifica considerazioni sul comportamento che gli individui potrebbero adottare per far sì che venga selezionata collettivamente la scelta da loro preferita. Abbiamo già visto in precedenza come in talune circostanze possano crearsi per gli individui degli incentivi a dichiarare falsi sistemi di preferenze personali. In particolare ci riferiamo a quelle situazioni (lo avevamo visto anche per le regole per la determinazione delle scelte sociali) in cui una falsa dichiarazione della struttura delle proprie preferenze sulla alternative da parte di un individuo, data la struttura del meccanismo di scelta collettiva, conduce ad una classificazione delle alternative preferite nell'ordinamento collettivo migliore per l'individuo stesso. Definiremo quindi l'assenza di possibilità di manipolazioni di questo genere come segue:

Definizione 11.5 [Non-manipolabilità delle CSS (FSS)]
Dato un insieme N di n individui, una CSS (FSS) definita su $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ con valori sull'insieme delle alternative A si dice *non-manipolabile* se

$$\forall\ (\succeq_h)_{h\in N} \in \mathcal{Q}^n,\ \forall\ i \in N,\ \forall\ \sqsupseteq_i \in \mathcal{Q}$$

$$\forall\ a \in C((\succeq_h)_{h\in N}), \forall\ b \in C(\sqsupseteq_i, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{i\}}) \qquad a\ \succeq_i\ b \tag{46}$$

dove $(\sqsupseteq_i, (\succeq_h)_{h \in N \setminus \{i\}})$ è il vettore di n sistemi di preferenza $(\succeq_h)_{h \in N}$ in cui $\succeq_i$ è stato sostituito da $\sqsupseteq_i$.

■

Una CSS (FSS) non manipolabile garantisce che, dato un profilo di preferenze individuale, tutte le alternative appartenenti all'insieme assunto come valore dalla CSS (FSS) in corrispondenza di quel profilo di preferenze sono preferite da ciascun individuo (secondo il proprio sistema di preferenze individuale) a ogni alternativa appartenente all'insieme assunto come valore dalla CSS (FSS) qualora un qualsiasi sistema di preferenze individuale venga sostituito all'interno del profilo di preferenze iniziale.
Tra le proprietà che avevamo già visto parlando di regole per la determinazione della scelta sociale, c'è anche la *dittatorialità* che può essere riformulata su misura delle CSS (FSS). In questo caso il dittatore non impartirà un sistema di preferenze, ma bensì una o più alternative preferite a tutte le altre.

Definizione 11.6 [Dittatorialità delle CSS (FSS)]
Dato un insieme N di n individui, una CSS (FSS) definita su $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ con valori sull'insieme delle alternative A si dice *dittatoriale* (con dittatore i) se esiste $i \in N$ tale che

$$\forall\ (\succeq_h)_{h \in N} \in \mathcal{Q}^n,\ \forall\ a \in C((\succeq_h)_{h \in N}), \qquad a \succeq_i b \qquad \forall\ b \in A \tag{47}$$

■

Potremmo anche richiedere ad una CSS (FSS) che sia a priori permessa la scelta di una o più alternative qualsiasi tra quelle disponibili, cioè che per ogni alternativa disponibile data esista un vettore di preferenze individuali tale per cui la CSS (FSS) fornisca in corrispondenza di quel vettore un insieme di alternative che contenga la data alternativa. Chiameremo tale proprietà *sovranità popolare*.

Definizione 11.7 [Sovranità popolare delle CSS (FSS)]
Dato un insieme N di n individui, una CSS (FSS) definita su $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ con valori sull'insieme delle alternative A si dice che possiede *Sovranità popolare* se

$$\forall\ a \in A\ \exists\ (\succeq_h)_{h \in N} \in \mathcal{Q}^n \quad t.c. \quad a \in C((\succeq_h)_{h \in N}) \tag{48}$$

■

Data una coppia di vettori di preferenze individuali e una CSS (FSS) che fornisce in corrispondenza del primo vettore un insieme di scelta che contiene una data alternativa a, diremo che tale CSS (FSS) è monotona se, qualora per il secondo vettore la classificazione in ciascuno ordinamento individuale di a non peggiori mentre gli ordinamenti delle altre alternative rimangono inalterati rispetto a quelli del primo, l'insieme restituito dalla CSS (FSS) in corrispondenza del secondo vettore contiene a ed è contenuto nell'insieme fornito dalla CSS in corrispondenza del primo vettore.

Definizione 11.8 [Monotonia delle CSS (FSS)]
Dato un insieme N di n individui, una CSS (FSS) definita su $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ con valori sull'insieme delle alternative A si dice *monotona* se:
$\forall\ (\succeq_h)_{h\in N}, (\sqsupseteq_h)_{h\in N} \in \mathcal{Q}^n$
$[\ a \in C((\succeq_h)_{h\in N}) \quad e \quad (\succeq_h)_{h\in N} \longrightarrow (\sqsupseteq_h)_{h\in N}$ rispetto ad a $] \quad \Rightarrow$
$[\ a \in C((\sqsupseteq_h)_{h\in N}) \quad e \quad C((\sqsupseteq_h)_{h\in N}) \subseteq C((\succeq_h)_{h\in N})\ ]$
dove $(\succeq_h)_{h\in N} \longrightarrow (\sqsupseteq_h)_{h\in N}$ rispetto ad a è definito come segue:

$$\begin{cases} \forall\ h \in N,\ \forall\ b, c \in A \setminus \{a\} & b\ \succeq_h c \Leftrightarrow b \sqsupseteq_h c \\ \forall\ h \in N,\ \forall\ b \in A \setminus \{a\} & a\ \succeq_h b \Rightarrow a \sqsupseteq_h b \end{cases} \tag{49}$$

■

Esercizio 11.1 *Sia N l'insieme di n individui e $A = \{0,1\}$ l'insieme delle possibili alternative. Sia inoltre $F : \{0,1\}^n \to A$ una FSS, dove, nel dominio della FSS, indichiamo con 0 la relazione di preferenza tra le due alternative in A tale che $0 \succ 1$ mentre indichiamo con 1 la relazione di preferenza tra le due alternative in A tale che $1 \succ 0$. Provare che:*

1. *F è neutrale $\Leftrightarrow$ $F(e-x) = 1 - F(x) \quad \forall x \in \{0,1\}^n$;*
2. *F è anonima $\Leftrightarrow$ $\exists \quad f : \{0,1,\dots,n\} \to \{0,1\}$ tale che $\forall\ x \quad \Big(F(x) = f(\sum_{i=1}^n x_i)\Big)$;*
3. *F è efficiente $\Leftrightarrow$ $\Big(F(0,0,\dots,0) = 0,\ F(e) = 1\Big)$;*
4. *F è monotona $\Leftrightarrow \forall\ x, y \in \{0,1\}^n$ tale che $[x \le y \Rightarrow F(x) \le F(y)]$.*

Esistono delle relazioni tra le proprietà che abbiamo appena definito. Ne mostriamo alcune di seguito:

Proposizione 11.1 *Siano dati un insieme N di n individui e un insieme A di $p \ge 3$ alternative. Sia inoltre F la FSS definita come $F : \mathcal{H}^n \to A$, dove $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}$ è l'insieme di tutti gli ordini totali su A. Se F è non-manipolabile allora F è anche monotona.*
Dim.
Si considerino due n-uple di sistemi di preferenze $(\succeq_h)_{h\in N}$, $(\sqsupseteq_h)_{h\in N} \in \mathcal{H}^n$ tali che $(\succeq_h)_{h\in N} \longrightarrow (\sqsupseteq_h)_{h\in N}$ rispetto ad a, $a \in A$. Si supponga inoltre che $(\sqsupseteq_h)_{h\in N}$ sia diverso da $(\succeq_h)_{h\in N}$ per un numero $t \le n$ di sistemi di preferenze individuali e che $F((\succeq_h)_{h\in N}) = a$.
Si consideri l' n-upla $\Big(\ \sqsupseteq_i, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{i\}}\Big)$ tale per cui $\sqsupseteq_i$ differisce da $\succeq_i$ per la classificazione di a rispetto le altre alternative (ovviamente continuando a verificare la condizione $(\succeq_h)_{h\in N} \longrightarrow (\sqsupseteq_h)_{h\in N}$).
Supponiamo che $F\Big(\ \sqsupseteq_i, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{i\}}\Big) = b$, $b \in A \setminus \{a\}$. Per come è definita

la non-manipolabilità su F si avrà:
$a \ \succeq_l \ F\Big(\sqsupseteq_i, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{i\}}\Big) \quad \forall\ l \in N.$
Inoltre, poichè $(\succeq_h)_{h\in N} \ \longrightarrow \Big(\sqsupseteq_i, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{i\}}\Big)$ *rispetto ad a, si avrà che* $a \succeq_i c \Rightarrow a \sqsupseteq_i c\ \forall c \in A\setminus\{a\}$, *(e quindi anche per $c = b$).*
D'altra parte, sempre per la non-manipolabilità di F, si avrà anche che:
$F\Big(\sqsupseteq_i, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{i\}}\Big) \ \succeq_l \ a, \quad \forall\ l \in N\setminus\{i\}$ *e*
$F\Big(\sqsupseteq_i, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{i\}}\Big) \ \sqsupseteq_i \ a.$
Poichè le preferenze degli individui sono ordini totali, cioè sono preordini totali che rispettano anche la condizione di antisimmetria, per cui non esistono alternative diverse tra loro che siano anche tra loro indifferenti, affinchè la non-manipolabilità rimanga soddisfatta deve essere $F\Big(\sqsupseteq_i, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{i\}}\Big) = a$ *(o uguale ad $\{a\}$ se si vuole considerare una FSS come una CSS a valori in insiemi costituiti da un solo elemento), da cui si ottiene la contraddizione e rimane dimostrato che se* $(\succeq_h)_{h\in N} \ \longrightarrow \Big(\sqsupseteq_i, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{i\}}\Big)$ *rispetto ad a allora* $F\Big(\sqsupseteq_i, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{i\}}\Big) = a.$
Sostituendo ora all'n-upla $\Big(\sqsupseteq_i, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{i\}}\Big)$ *un altro sistema di preferenza individuale diverso in* $(\sqsupseteq_h)_{h\in N}$ *che non sia quello sostituito in precerenza* $(\sqsupseteq_i)$*, si ottiene una nuova n-upla, diciamo* $\Big(\sqsupseteq_i, \sqsupseteq_j, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{i,j\}}\Big)$.
Procedendo con il ragionamento per assurdo utilizzato nel passo precedente, questa volta tra le n-uple $\Big(\sqsupseteq_i, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{i\}}\Big)$, $\Big(\sqsupseteq_i, \sqsupseteq_j, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{i,j\}}\Big)$,
si ottiene $F\Big(\sqsupseteq_i, \sqsupseteq_j, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{i,j\}}\Big) = a.$
Ripetendo quindi i passaggi sopra descritti un numero t di volte, giungendo cioè a ricostruire passo dopo passo l'intero profilo $(\sqsupseteq_h)_{h\in N}$*, si ottiene:*
$F\Big((\sqsupseteq_h)_{h\in N}\Big) = a$*, che soddisfa la condizione di monotonia.* ■

Proposizione 11.2 *Siano dati un insieme N di n individui e un insieme A di $p \geq 3$ alternative. Sia inoltre F la FSS definita come $F : \mathcal{H}^n \rightarrow A$, dove $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}$ è l'insieme di tutti gli ordini totali su A. Se F è non-manipolabile e soddisfa la sovranità popolare, allora F è anche pareto efficiente.*
Dim.
Si consideri l'n-upla di ordini totali $(\succeq_h)_{h\in N} \in \mathcal{H}^n$ *tale che* $F((\succeq_h)_{h\in N}) = a$, $a \in A$.
Poichè F rispetta la sovranità popolare, allora esiste una n-upla di sistemi di preferenze costituito da un ordine totale $(\sqsupseteq_h)_{h\in N} \in \mathcal{H}^n$ *tale che* $F((\sqsupseteq_h)_{h\in N}) = b$, $b \in A\setminus\{a\}$.
Si supponga che esista $i \in N$ per il quale $b \succ_i a$.
Ma d'altro canto, per la non-manipolabilità applicata n volte,
$F\Big((\succeq_h)_{h\in N}\Big) \ \succeq_i \ F\Big(\sqsupseteq_{j\in N\setminus\{i\}}, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{j\}}\Big) \ \succeq_i$

$$\succeq_i \; F\Big(\sqsupseteq_{j\in N\setminus\{i\}}, \sqsupseteq_{k\in N\setminus\{i,j\}}, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{j,k\}}\Big) \; \succeq_i \; \ldots \; \succeq_i \; F\Big((\sqsupseteq_h)_{h\in N}\Big) = b$$

che produce una contraddizione con l'ipotesi per cui $b \succ_i a$, dato che la relazione di preferenza degli individui è antisimmetrica e $b \neq a$.

■

Le precedenti proposizioni sono rilevanti per la dimostrazione del seguente risultato, analogo, per certi versi, a quello di Arrow:

Teorema 11.1 (Gibbard-Sattherthwaite 1973) *Siano dati un insieme N di n individui e un insieme A di $p \geq 3$ alternative. Sia inoltre F la FSS definita come $F : \mathcal{H}^n \to A$, dove $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}$ è l'insieme di tutti gli ordini totali su A, avente le seguenti due proprietà:*

1. *Sovranità popolare;*
2. *Non-manipolabilità.*

Allora F è dittatoriale.

Del precedente teorema non presentiamo la dimostrazione nei termini espressi dall'enunciato, ma ci limitiamo ad'illustrarne un esempio nel caso di due giocatori e di tre alternative.

Esempio 11.1 *Si consideri una situazione in cui $N = \{1, 2\}$ e $A = \{a, b, c\}$ ed una FSS che chiamiamo F, non-manipolabile e che soddisfi la sovranità popolare. Per provare il teorema in questa situazione mostriamo che c'è un dittatore.*
Consideriamo un profilo di preferenze in cui entrambi gli individui considerano le alternative a e b migliori di c, seppure con classificazioni ordinali differenti. In particolare si supponga il vettore di sistemi di preferenze strette $\Pi = \Big((a \succ_1 b \succ_1 c), (b \succ_2 a \succ_2 c)\Big)$.
Per la proposizione 11.2, F deve essere anche Pareto efficiente, il che significa che $F(\Pi) \neq c$.
Si assuma che $F(\Pi) = a$. Allora, se consideriamo il vettore di sistemi di preferenze strette $\Pi' = \Big((a \succ_1 b \succ_1 c), (b \succ_2 c \succ_2 a)\Big)$, in questo caso deve essere di nuovo $F(\Pi') = a$. La ragione è che ancora una volta, sempre per la Pareto efficienza, non può essere $F(\Pi') = c$, ma nemmeno può essere, per la non-manipolabilità, $F(\Pi') = b$.
Si noti che in Π' la miglior alternativa per 1 è a mentre per l'individuo 2 a è la peggiore alternativa possibile. Nonostante ciò, abbiamo visto che, in tale vettore Π', F assume valore uguale ad a. Poichè per la proposizione 11.1 F è anche monotona, ne segue che F assume come valore a ogni volta che il giocatore 1 pone tale alternativa in cima alle sue preferenze. Dato che il ragionamento seguito è simmetrico per tutte le alternative, ne risulta che il giocatore 1 è un dittatore.

12 Problema dell'implementazione

Per illustrare la natura di un problema di implementazione, consideriamo un "pianificatore" che desidera assegnare un oggetto ad uno solo tra due individui. Si supponga che il pianificatore desideri assegnare l'oggetto all'individuo che valuta di più l'oggetto in questione (si pensi ad esempio ai meccanismi su cui sono basate le aste) ma egli non sa quale dei due sia. Il suo problema è allora ideare un meccanismo per il quale, tenuto conto delle possibili preferenze degli individui e delle intensità con cui esse sono espresse, l'oggetto sia dato all'individuo che lo valuta di più.
Il problema è, nella maggior parte dei casi, di difficile (talvolta impossibile) soluzione.
Si assume quindi che esista un pianificatore in grado di definire le regole di interazione tra gli individui e che gli individui, quando si confrontino con queste regole, le assumano alla lettera, beninteso che il pianificatore possa determinare le regole dell'interazione ma non le preferenze e le azioni degli individui.
Tutti questi aspetti trovano una collocazione ottimale in quella che è la formalizzazione standard della Teoria dei Giochi non cooperativi. Anzi, la teoria dell'implementazione è una parte ben precisa della Teoria dei Giochi. Non vogliamo però in questa sede aprire una parentesi troppo vasta per essere trattata in maniera esauriente in poche righe. Rimandiamo per chi volesse approfondire questo argomento al libro di Osborne e Rubinstein.
Ciò che vorremmo fare in questo capitolo è dare un'idea di cosa si propone di fare la teoria dell'implementazione sfruttando unicamente i risultati sin qui mostrati, che sono a loro volta strettamente connessi alla teoria dell'implementazione vera propria, quella, per intenderci, che utilizza il linguaggio formale della Teoria dei Giochi.
La storia biblica del Giudizio di Salomone illustra alcune delle idee principali della teoria dell'implementazione.

Esempio 12.1 (Il Giudizio di Salomone) *Due donne,* 1 *e* 2*, reclamano entrambe un neonato. Ognuna di esse sa chi è la vera madre, ma nessuna può dimostrare di essere la vera madre.*
Salomone prova a dedurre la verità minacciando di tagliare in due il neonato, contando sul fatto che la falsa madre preferisca questo risultato a quello che la madre vera ottenga il bambino mentre la vera madre preferisca dar via il bambino piuttosto che vederlo fatto a pezzi. Salomone può decidere di dare il bambino ad una delle madri oppure ordinare di tagliarlo in due.
Formalmente sia l'insieme delle alternative $A = \{a, b, c\}$*:* a *è l'alternativa nella quale il bambino è dato alla donna* 1*,* b *quella in cui il bambino è dato alla donna* 2 *e* c *l'alternativa in cui il bambino è tagliato in due. Due profili di preferenze sono possibili:*

$$\theta \text{ (1 è la vera madre): } a \succ_1 b \succ_1 c \text{ e } b \succ_2 c \succ_2 a$$

θ'(2 è la vera madre): $a \succ_1 c \succ_1 b$ e $b \succ_2 a \succ_2 c$

Che meccanismo può ideare Salomone per riuscire a scoprire chi è la vera madre a cui dare il bambino?

Lasceremo questa domanda senza una risposta definitiva. Si noti soltanto che la FSS tale per cui $F(\theta) = a$ e $F(\theta') = b$ difficilmente darà i risultati sperati da Salomone. Infatti, tale FSS è manipolabile (lo si provi per esercizio). Questo significa che le donne possono trarre beneficio dalla falsa dichiarazione delle proprie preferenze e Salomone, senza qualche ulteriore specificazione, non è in grado di conoscere le vere preferenze delle due donne e di decidere quindi quale delle due sia la vera madre a cui restituire il figlio.

Esercizio 12.1 *Nella storia biblica Salomone riesce ad assegnare il bambino alla vera madre: egli lo consegna all'unica donna che dichiara di preferire che il bambino venga dato all'altra donna piuttosto che venga tagliato in due. Provare a dare una giustificazione plausibile del perchè le cose andarono in quel modo.*

Riferimenti bibliografici

[1] Blair D. H., Pollak R. A. (1982) *Scelte collettive razionali* - Modelli Matematici - Le Scienze quderni:**81**.

[2] Felsenthal D., Machover M. (1995) *"Postulates and Paradoxes of Voting Power - A Critical Re-appraisal"* - Theory and Decision - **38**, pp. 195-229.

[3] Feltkamp V. (1995) *Cooperation in Controlled Network* - KUB Tilburg University. - PhD Thesis.

[4] Ferrari G., Margiocco M. (1997) *Dispense sui Giochi Cooperativi* - Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova - Dispense Ciclo di Seminari di Teoria dei Giochi 1997/98.

[5] Laruelle A., Valenciano F. (1999) *Why power indices should be efficient* - Department of Applied Economics IV Basque Country University. - Discussion paper: **1**.

[6] Owen G. (1995) *Game Theory* - Academic Press - Third edition, book: **pp.447**.

[7] Osborne J., Rubinstein A. (1994) *Course in Game Theory*

[8] Patrone F. (1983) *Seminario di economia matematica* - Dipartimento di Matematica dell' Università di Pavia - Appunti del seminario di economia matematica 1982/83.

[9] Patrone F. (1998) *Dispense sui Giochi Cooperativi* - Dispense lezioni Master in Teoria delle Decisioni.

[10] Pederzoli G. (1994) *Giochi Cooperativi: teoria, metodi, applicazioni* - Istituto di Statistica e Ricerca Operativa dell'Università di Trento. - Dispense.

[11] Tijs F. (1983) *Sociale Keuze Theorie* - Mathematisch Instituut Katholieke Universiteit Nijmegen - Dispense in lingua Olandese.

[12] Young H.P. (1995) *Equity: In Theory and Practice* - PRINCETON University Press - book: **pp.253**.