

# MATEMATICA PER LO STUDIO DELLE INTERAZIONI STRATEGICHE: TEORIA DEI GIOCHI

Anna TORRE <sup>1</sup>

## 1 INDUZIONE A RITROSO

Se un gioco è dato in forma estesa ed è finito e a informazione perfetta, un modo per trovare equilibri di Nash in strategie pure è dato dal cosiddetto metodo dell'induzione a ritroso. L'idea è la seguente: si osservano gli ultimi nodi nei quali un giocatore è chiamato a giocare e si suppone (coerentemente con le ipotesi di razionalità e intelligenza) che in questi nodi il giocatore scelga la strategia che gli offre il payoff maggiore. Nei nodi precedenti, il giocatore che è chiamato a giocare sa cosa farà l'ultimo giocatore in quanto egli conosce il gioco e sa che l'ultimo giocatore è intelligente e razionale. Così lui si comporta come se in realtà fosse l'ultimo a giocare, in quanto il payoff che ottiene giocando ciascuna strategia gli è noto perché sa quali saranno le conseguenze della sua scelta. In questo modo si procede passo dopo passo ...in conclusione nel primo nodo il giocatore che è chiamato a scegliere in base alle ipotesi di conoscenza comune della razionalità e intelligenza di tutti i giocatori, in realtà sa già cosa succederà in corrispondenza ad ogni sua scelta. Naturalmente chi è abituato a questo tipo di ragionamenti sa che stiamo raccontando in maniera molto intuitiva un procedimento di induzione.

**Definizione 1.1** *Un sottogioco  $G'$  di un gioco  $G$  in forma estesa a informazione perfetta è il gioco formato da un nodo di  $G$  e da tutti i suoi successori in  $G$ .*

## 2 RAFFINAMENTI DELL'EQUILIBRIO DI NASH

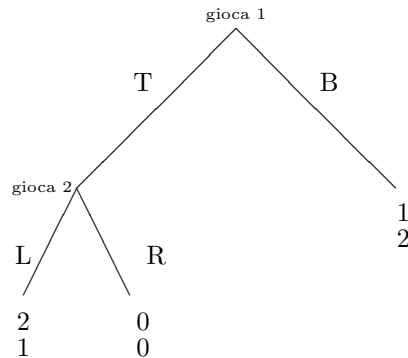
Tutto ciò ci porta alla definizione di "equilibrio perfetto nei sottogiochi" (SPE: subgame perfect equilibrium), che è dovuto a Selten (1965).

Se ci limitiamo, per semplicità, ai giochi ad informazione perfetta, la condizione che imponiamo è che non solo si abbia un equilibrio, ma che tale resti anche quando "restringiamo" le strategie ai sottogiochi del gioco dato. Per gioco ad informazione perfetta la definizione di sottogioco è semplicissima: si tratta di considerare un generico nodo e prenderlo come "radice" del gioco. Osserviamo che il metodo della induzione a ritroso per trovare un equilibrio di Nash in un gioco ad informazione perfetta fornisce, in realtà, un equilibrio perfetto nei sottogiochi.

---

<sup>1</sup>Dipartimento di Matematica, Università di Pavia, Via Ferrata 1, 27100, Pavia, Italy. *E-mail:* [atorre@dimat.unipv.it](mailto:atorre@dimat.unipv.it)

Si consideri il seguente gioco (in forma estesa):



Quale risultato ci si può attendere? Tenendo conto dei presupposti di razionalità ed intelligenza dei giocatori, possiamo pensare che *I* giochi *T*. Infatti *I* prevede che, quando tocca a *II* scegliere, egli sceglierà *L*, visto che gli dà un risultato migliore di *R* (infatti *II* ottiene un payoff pari ad 1 se gioca *L*, mentre se sceglie *R* ottiene 0). Visto che il payoff risultante per *I* dalle scelte *T* ed *L* è addirittura il migliore che lui possa avere in questo gioco, ci possiamo davvero attendere che egli scelga *T*. D'altronde, le scelte *T* ed *L* sono anche quelle che emergono dall'applicazione dell'induzione a ritroso.

Possiamo, comunque, scrivere la forma strategica del gioco e trovarne gli equilibri di Nash:

$I \backslash II$	<i>L</i>	<i>R</i>
<i>T</i>	2, 1	0, 0
<i>B</i>	1, 2	1, 2

Si vede immediatamente che questo gioco ha *due* equilibri (in strategie pure):  $(T, L)$  e  $(B, R)$ : il primo è perfetto nei sottogiochi, il secondo no. Quale è il senso del nuovo equilibrio che abbiamo trovato, ovvero  $(B, R)$ ?

Possiamo interpretarlo come risultato di una minaccia (di "ritorsione") da parte di *II*: se *I* non gioca *B* (che dà a *II* il risultato migliore possibile), allora *II* per ritorsione giocherà *R*, "punendo" il giocatore *I*. Va notato, tuttavia, che *I* punisce anche se stesso! La scelta di *R* non è infatti ottimale per *II*, che ottiene un payoff migliore giocando *L*.

Come è possibile che un equilibrio di Nash preveda per un giocatore una scelta non ottimale? La risposta è facile: in realtà, l'equilibrio  $(B, R)$  non prevede affatto che

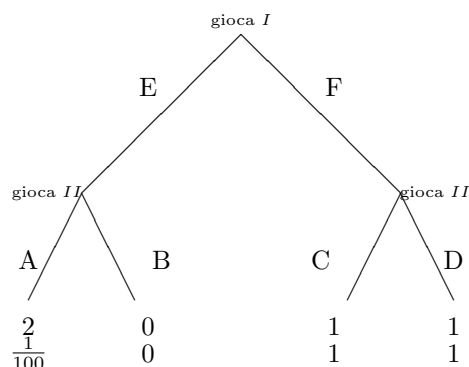
*II* giochi davvero *R*; la scelta di *B* fa terminare il gioco e quindi *II* non deve effettivamente fare questa scelta. Più in generale, un equilibrio di Nash può prevedere delle scelte non ottimali da parte dei giocatori, ma queste scelte avvengono in nodi dell'albero che non vengono raggiunti, se viene appunto giocato quanto previsto dall'equilibrio.

D'altro canto, l'equilibrio  $(B, R)$  sembra comunque essere meno attendibile di quanto non lo sia  $(T, L)$ . In effetti, la “minaccia” da parte di *II* di giocare *R* è ben poco attendibile: se *I* lo ignora e gioca *T*, a questo punto, per la sua stessa razionalità, *II* giocherà *L*. Utilizzando la forma estesa, abbiamo scoperto che non tutti gli equilibri di Nash sono “uguali”.

Se l'idea di equilibrio perfetto nei sottogiochi permette di eliminare alcuni equilibri di Nash, per così dire “inferiori”, non ci si deve però aspettare che scompaiano tutti i problemi.

Basta considerare questi esempi:

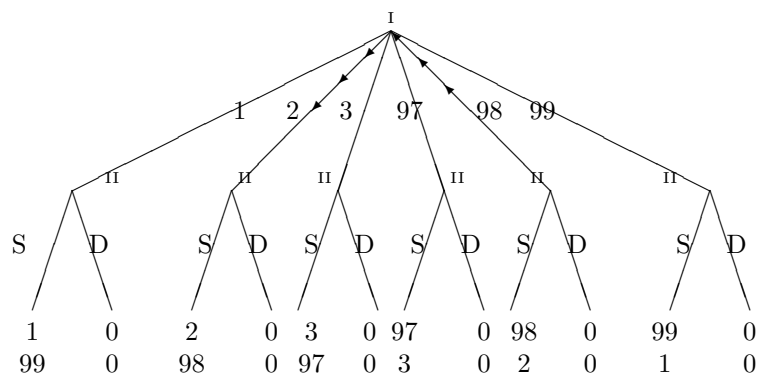
**Esempio 2.1** *Troviamo gli equilibri di Nash perfetti nei sottogiochi per il seguente gioco in forma estesa e riflettiamo sul comportamento che il giocatore I potrebbe avere se dovesse davvero giocare.*



In questo caso c'è un unico SPE. Ma certo il giocatore *II* potrebbe essere “incattivito” se *I* fa la scelta prevista dal SPE. In effetti, questo gioco assomiglia al cosiddetto “ultimatum game”, che è forse il più studiato a livello della Teoria dei Giochi sperimentale.

Il gioco avviene così : su un tavolo ci sono 100 monete da 1 euro. Il giocatore *I* deve fare una proposta di spartizione, indicando quante monete lui vuole prendere (da 1 a 99). Dopo di che tocca a *II*, che può scegliere tra due opzioni: accetta la proposta di spartizione di *I* oppure rifiuta. Nel caso in cui rifiuti, entrambi i giocatori non prendono nulla.

Possiamo disegnare (in parte) il gioco in forma estesa:



È immediato verificare che il SPE prevede che  $I$  scelga 99 monete per sé e che  $II$  accetti. Nella realtà effettiva, la probabilità che  $II$  accetti, qualora  $I$  tenga per sé più una settantina di monete, è molto bassa. Una prima spiegazione di questi risultati difforni della predizione della Teoria dei Giochi è basata sul fatto che le preferenze del giocatore  $II$  non tengono conto solo dei soldi. Ma potrebbero (possono!) incorporare altri fattori: aspetti di “giustizia”, o di “rivalsa”, od altro. Ciò non toglie che, comunque, l’esperimento possa essere fatto in condizioni controllate e che anche in questo contesto si ottengano divaricazioni importanti tra quanto prevede la teoria e quanto avviene nella realtà.

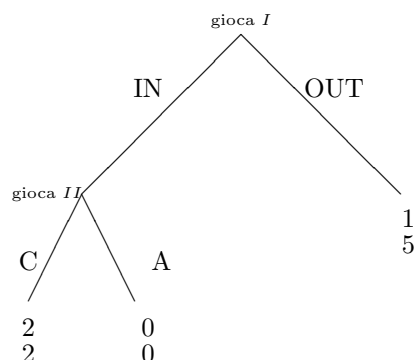
Vi sono altri esempi in cui un SPE risulta essere problematico. Un paio sono molto famosi: il “chain store paradox” (Selten, *Theory and Decision*, 1978) e il “centipede” (Rosenthal, *Journal of Economic Theory*, 1981).

Nel caso del “chain store paradox”, abbiamo un giocatore (la catena di supermercati) che si confronta in sequenza con vari giocatori (nell’esempio di Selten sono 20, ciascuno in una città diversa). Ciascuno dei quali può decidere se aprire oppure no un supermercato. Rinvio alla lettura del lavoro originario di Selten per i dettagli e per le molte ed interessanti considerazioni che fa.

Il gioco è costituito da una sorta di “ripetizioni” di questa struttura (che è analoga all’esempio che abbiamo usato per introdurre gli SPE):

L’idea è che il giocatore  $I$  può decidere se aprire un supermercato (IN) oppure no (OUT). Se non lo apre, ovvero se non fa concorrenza alla catena di supermercati  $S$ , la catena  $S$  guadagna 5 (perché non trova concorrenza) mentre lui resta con il capitale che aveva, cioè 1. Se uno apre il supermercato, la reazione di  $S$  può essere di due diversi:  $A$  ( $A$  sta per “aggressiva”), oppure  $C$  ( $C$  sta per “conciliante”). La scelta  $A$  potrebbe corrispondere, ad esempio, ad una guerra di prezzi, che porta di fatto sia  $I$  che  $S$  a non guadagnare nulla (anzi,  $I$  perde anche il capitale che

aveva). Se invece la scelta è  $C$ , di fatto i due si spartiscono il mercato. È evidente che l'equilibrio perfetto nei sottogiochi è  $(IN, C)$ .



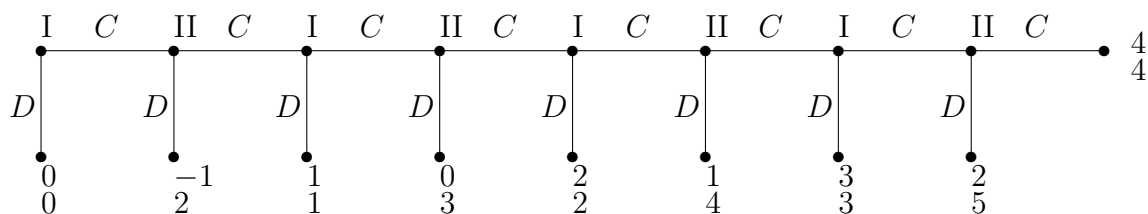
Nel caso di due potenziali concorrenti per  $S$ , l'albero diventa:

L'equilibrio perfetto nei sottogiochi è indicato dalle frecce. Il risultato è 2 per i due potenziali rivali (che di fatto aprono entrambi il supermercato), e di 4 per la catena  $S$ . Si noti che  $S$  potrebbe ottenere un payoff pari a 10, se potesse convincere i due potenziali concorrenti a stare fuori dal mercato.

Se anziché esserci due potenziali rivali, ce ne sono venti (come nell'esempio originale di Selten),  $S$  ricaverebbe un guadagno ben maggiore ( $20 \cdot 5$  anziché  $20 \cdot 2$ ) se riuscisse a convincerli che lui adotterebbe una strategia aggressiva. Insomma, l'idea di SPE non contempla l'utilità che può avere per un giocatore costruirsi una "reputazione": lo obbliga, se così si può dire, a fare delle scelte miopi, pur se razionali. L'esempio di Rosenthal mostra alcuni aspetti interessanti. Uno è che l'esito di un SPE può essere inefficiente. Ma questo non è certo una novità. Mostra anch'esso una sorta di "miopia" nelle strategie che i giocatori vengono "obbligati" a giocare se si accetta l'idea di SPE. L'aspetto però più interessante riguarda un problema di contraddittorietà nelle argomentazioni che stanno alla base dell'idea di SPE.

Il gioco è il seguente (volendo, lo si può "allungare" a piacimento, per rendere ancora più stridenti le difficoltà che emergono):

### **Esempio 2.2** *Il centipede*



Il risultato è inefficiente. Ed un po' di "capacità di vedere lontano" dovrebbe portare i giocatori a non "defezionare" subito dal gioco.

Ma c'è un problema ancor più grave. Si pensi al ragionamento che fa *II* quando "defeziona" la terza volta in cui tocca a lui giocare. Perché "defezionare"? Perché ritiene (da induzione a ritroso) che nella mossa successiva *I* defezionerebbe. Ma se *II* si trova davvero a dover giocare la sua terza mossa, ciò è solo perché *I* ha deciso per ben tre volte di comportarsi in modo diverso da come prescrive lo SPE (ed anche *II* stesso, si noti!). Appare quindi un pò curioso che *II* "defezioni" ipotizzando un comportamento futuro di "razionalità" da parte di *I*, che se fosse stato adottato in passato non avrebbe certamente portato *II* a dover giocare!

I SPE sono un cosiddetto "raffinamento" degli equilibri di Nash che sfrutta la forma estesa. Sono però stati proposti altri raffinamenti che utilizzano solo la forma strategica. Mi limito a citare gli equilibri perfetti (introdotti da Selten nel 1975). Vediamo solo un esempio.

Qui abbiamo due equilibri di Nash (in strategie pure):  $(T, L)$  e  $(B, R)$ . Ma solo  $(T, L)$  è "perfetto".

$I \backslash II$	$L$	$R$
$T$	1, 1	0, 0
$B$	0, 0	0, 0

L'idea di equilibrio perfetto è basata sul fatto che il giocatore non è in grado di evitare errori. E quindi un equilibrio dovrebbe essere, per così dire, "limite" di equilibri che si ottengono "obbligando" i giocatori ad effettuare errori.

### 3 GIOCHI RIPETUTI

L'idea dei giochi ripetuti è la seguente: se un gioco viene giocato un'unica volta non c'è alcun motivo per cooperare se non c'è un contratto scritto, ma se il gioco viene ripetuto possiamo pensare che la non cooperazione a un certo stadio del gioco potrebbe significare che negli stadi successivi l'altro giocatore potrebbe non cooperare più e allora l'incentivo alla cooperazione potrebbe essere più forte. Si tratta di vedere come si costruisce una norma sociale. Come formalizzare questo aspetto della vicenda?

Chiaramente i comportamenti saranno diversi se i giocatori hanno un orizzonte temporale breve o un orizzonte temporale lungo (infinito). I risultati nei due casi sono diversi. La differenza tra orizzonte finito e infinito peraltro è più una differenza di percezione della durata del gioco da parte dei giocatori che non una situazione effettivamente reale. In generale un modello di orizzonte finito è più ragionevole quando i giocatori percepiscono chiaramente il periodo finale, mentre quello con orizzonte infinito quando i giocatori dopo ogni periodo pensano che il gioco continuerà per un periodo ancora. Altrimenti, visto che la vita è finita, potremmo modellizzare solo orizzonte finito.

Torniamo ora al problema dei giochi ripetuti e studiamo separatamente il caso dell'orizzonte temporale finito e infinito.

#### 3.1 Orizzonte temporale finito

In caso di ripetizione finita occorre evidenziare due risultati:

- se il gioco possiede un solo equilibrio di Nash in strategie pure, il gioco ripetuto con orizzonte temporale finito ha un unico equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi che consiste nel giocare ad ogni passo la strategia di equilibrio
- Se il gioco ha più di un equilibrio di Nash, allora il gioco ripetuto può avere degli equilibri di Nash perfetti nei sottogiochi in cui in qualche passo i giocatori non giocano una strategia di equilibrio del gioco componente.

Il primo di questi due risultati può essere illustrato analizzando il dilemma del prigioniero:

	C	NC
C	-5,-5	-1,-6
NC	-6,-1	-2,-2

Questo gioco ha un unico equilibrio di Nash in cui ogni giocatore sceglie C, inoltre per ogni giocatore l'azione C domina strettamente l'azione NC, in modo che la razionalità della scelta (C,C) ha una notevole forza. Ripetiamo due volte il gioco.

Ricordiamo che la scelta è sempre simultanea, quindi i giocatori scelgono due volte ma sempre simultaneamente. Rispetto al gioco in una sola mossa la differenza qui è che essi possono osservare l'esito della prima volta che giocano e poi muovere la seconda. Abbiamo quindi quattro sottogiochi, tutti relativi alla seconda ripetizione, che possiamo classificare così:

- 1) nella prima ripetizione le mosse sono (C,C)
- 2) nella prima ripetizione le mosse sono (C,NC)
- 3) nella prima ripetizione le mosse sono (NC,C)
- 4) nella prima ripetizione le mosse sono (NC,NC)

La matrice delle vincite del sottogioco 1 è la seguente:

	C	NC
C	-10,-10	-6,-11
NC	-11,-6	-7,-7

L'equilibrio di Nash è dunque (C,C)

La matrice delle vincite del gioco 2 è

	C	NC
C	-5,-11	-1,-12
NC	-6,-12	-2,-8

L'equilibrio di Nash è dunque (C,C). Lo stesso accade per i sottogiochi 3 e 4. (Scrivere i payoff)

**Esempio 3.1** *Si consideri la seguente modifica del dilemma del prigioniero:*

<i>I/II</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>S</i>
<i>D</i>	5,5	3,6	0,0
<i>C</i>	6,3	4,4	0,0
<i>S</i>	0,0	0,0	1,1

*Gli equilibri di Nash sono (C,C) e (S,S). In realtà le vincite migliori per entrambi i giocatori sono quelle relative alle strategie (D,D) dove entrambi ottengono 5.*

*Supponiamo ora di ripetere il gioco due volte.*

*Notiamo per prima cosa che le strategie di ciascun equilibrio giocate entrambe le volte costituiscono un equilibrio di Nash e quindi nel gioco ripetuto si ritrovano gli equilibri di Nash del gioco di partenza. Tali equilibri sono anche perfetti nei sottogiochi*

Consideriamo anche la seguente strategia:

Scelgo D nel periodo 1, nel periodo 2 scelgo C se nel primo periodo le azioni osservate sono (D,D), altrimenti scelgo S.

Se entrambi i giocatori adottano questa strategia si ottiene ancora un equilibrio perfetto nei sottogiochi.

Per verificarlo occorre considerare 9 sottogiochi nel periodo 2, ciascuno corrispondente di una delle 9 coppie di strategie possibili nel primo gioco.

### 3.2 Giochi infinitamente ripetuti

Se un gioco viene ripetuto infinite volte si possono ottenere risultati differenti; in particolare acquistano rilevanza i concetti di minaccia e di punizione, come e più che nel caso di più equilibri di Nash. Ad esempio se il dilemma del prigioniero è ripetuto infinite volte non si può applicare il ragionamento basato sull'induzione a ritroso, per cui la minaccia

**“se non cooperi io non coopererò mai più”**

acquista un peso diverso. Il risultato più importante è il cosiddetto Folk's Theorem.

**Teorema 3.1** Dato un gioco  $G$  a due giocatori ad informazione completa, sia  $(e_1, e_2)$  il vettore dei payoff di un qualsiasi equilibrio di Nash di  $G$  e sia  $(x_1, x_2)$  un vettore di payoff ammissibili per  $G$ ; se  $x_i > e_i, i = 1, 2$  allora se il tasso di sconto è sufficientemente vicino ad 1, esiste un equilibrio perfetto nei sottogiochi del gioco infinitamente ripetuto il cui payoff medio è  $(x_1, x_2)$ .

In altre parole, se i giocatori sono sufficientemente pazienti, cioè se considerano rilevanti le vincite future ( $\delta$  tende a 1) qualsiasi esito che domina debolmente quello dell'equilibrio di Nash del gioco a un solo stadio è ottenibile da un equilibrio perfetto nei sottogiochi. Un tipo di strategie spesso utilizzate sono le cosiddette “trigger strategies (strategie di ritorsione)”.

Vediamo un esempio sempre riferito al dilemma del prigioniero. Supponiamo che entrambi i giocatori adottino la seguente strategia:

**T “Nel primo periodo scelgo NC e successivamente scelgo NC se e solo se in tutti i periodi precedenti ho osservato (NC,NC), in caso contrario da quel momento in poi scelgo C.”**

Calcoliamo le vincite di ciascun giocatore.

Se entrambi scelgono la strategia T sopra scritta ottengono :

$$u_I(T) = u_{II}(T) = -2 + \delta(-2) + \delta^2(-2) + \delta^3(-2) + \dots = \frac{1}{1-\delta}(-2)$$

Se I adotta un'altra strategia  $D_i$  che al passo  $i$ -esimo gli fa scegliere C per la prima volta, e II adotta T, ottiene  $u_I(D_i) = -2 + \delta(-2) + \delta^2(-2) + \dots + \delta^{i-1}(-2) + \delta^i(-1) + \delta^{i+1}(-5), \dots =$

$$-2 + \delta(-2) + \delta^2(-2) + \dots + \delta^{i-1}(-2) + \delta^i(-1) + \delta^{i+1} \frac{1}{1-\delta}(-5)$$

Si ha

$$u_I(D_i) \leq u_I(T) \Leftrightarrow \delta \geq \frac{1}{4}$$

$$\text{infatti: } \delta^i(-1) + \delta^{i+1}\frac{1}{1-\delta}(-5) \leq \delta^i\frac{1}{1-\delta}(-2) \Leftrightarrow \delta \geq \frac{1}{4}$$

Analogo discorso si può fare per II.

Quindi, se il tasso di sconto è maggiore di  $\frac{1}{4}$ , la coppia di strategie  $(T, T)$  è un equilibrio di Nash.

## 4 STRATEGIE CORRELATE E CONTRATTAZIONE

Consideriamo un gioco in forma strategica:  $(X, Y, u_I, u_{II})$ , dove  $X$  è l'insieme delle strategie del primo giocatore e  $Y$  è l'insieme delle strategie del secondo.

Per semplicità supponiamo che  $X$  ed  $Y$  siano insiemi finiti.

Supponiamo che sia possibile stringere accordi vincolanti, cioè consideriamo il gioco da un punto di vista cooperativo. Si noti che i giocatori possono decidere non solo di giocare una coppia di strategie  $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ , ma possono anche accordarsi su una strategia correlata  $\mu$  su  $X \times Y$ .

Indichiamo con  $\Delta(X)$  l'insieme di tutte le distribuzioni di probabilità su  $X$  e analogamente con  $\Delta(Y)$  e  $\Delta(X \times Y)$  rispettivamente l'insieme di tutte le distribuzioni di probabilità su  $Y$  e su  $X \times Y$ .

**Definizione 4.1** *Una strategia correlata è una distribuzione di probabilità su  $X \times Y$ .*

Ciò significa che i giocatori possono accordarsi su una distribuzione di probabilità qualunque su  $X \times Y$ , anziché scegliere ciascuno una distribuzione di probabilità sul suo spazio di strategie e considerare la distribuzione di probabilità su  $X \times Y$  che si ottiene dall'assunto che le due distribuzioni su  $X$  e  $Y$  siano indipendenti. Se supponiamo che  $X = \{x_1, \dots, x_m\}$  ed  $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ , allora una strategia correlata  $\mu$  è individuata da una matrice  $\mu_{ij}$ , dove  $\mu_{ij}$  è la probabilità assegnata da  $\mu$  alla coppia di strategie pure  $(x_i, y_j)$ .

Il *payoff atteso* da parte del giocatore  $I$ , se viene "giocata" la strategia  $\mu$ , è:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mu_{ij} u_I(x_i, y_j)$$

Questo è il valore atteso di  $u_I$  rispetto alla distribuzione di probabilità  $\mu$  su  $X \times Y$ . Possiamo indicarlo con:  $E_\mu(u_I)$ . Analogamente per  $II$  indichiamo il valore atteso di  $u_{II}$  con  $E_\mu(u_{II})$ .

Data la strategia  $\mu$ , otteniamo quindi  $(E_\mu(u_I), E_\mu(u_{II}))$ : si tratta di una coppia

di numeri reali che quindi possiamo rappresentare nel piano cartesiano. Abbiamo quindi una funzione  $\mathcal{E} : \Delta(X \times Y) \rightarrow \mathbf{R}^2$ .

Ci interessa l'immagine di  $\mathcal{E}$ , cioè  $\mathcal{E}(X \times Y)$ . Essa è l'involucro convesso dell'insieme

$$\{(u_I(x_i, y_j), u_{II}(x_i, y_j)) : i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\}$$

**Esempio 4.1** (*dilemma del prigioniero*) Consideriamo il gioco:

$I \setminus II$	$L$	$R$
$T$	3 3	0 5
$M$	5 0	1 1

L'insieme  $\mathcal{E}(X \times Y)$  è tratteggiato in figura.

Si verifica che  $\mathcal{E}(X \times Y)$  è un sottoinsieme chiuso, convesso e limitato di  $\mathbf{R}^2$ .

Possiamo pensare che i giocatori si accordino per giocare una strategia correlata  $\mu$  t.c.  $\mathcal{E}(\mu)$  sia efficiente. Non è però altrettanto agevole immaginare su quale specifica  $\mu$  si possano accordare: sarebbe interessante poter individuare un criterio di scelta che ci metta in grado di fare previsioni (o prescrizioni).

Prima di affrontare questo compito, sarà opportuno fare una pausa di riflessione, per introdurre qualche ulteriore elemento utile ai fini del nostro problema. Se è vero che l'insieme  $\mathcal{E}(X \times Y)$  rappresenta tutte le coppie dei valori dei payoff che i due giocatori possono ottenere sottoscrivendo accordi vincolanti per giocare una strategia correlata, ciò non di meno non è ragionevole immaginare che *tutti* gli accordi possano venire prevedibilmente sottoscritti. Ad esempio, nel dilemma del prigioniero un contratto che preveda di giocare la coppia di strategie  $(T, R)$  (con probabilità 1, s'intende) sarà difficilmente sottoscritto dal giocatore  $I$ , visto che lui, giocando  $B$ , è in grado di *garantirsi comunque* un payoff almeno pari ad 1.

Più in generale, possiamo immaginare che siano un importante punto di riferimento per i due giocatori i loro rispettivi valori di maxmin.

Ricordiamo che, se abbiamo un gioco finito  $(X, Y, u_I, u_{II})$ , è naturale considerare il valore di maxmin valutato sulla estensione mista del gioco. Pertanto, porremo

$$v_I = \max_{p \in \Delta(X)} \min_{q \in \Delta(Y)} \hat{u}_I(p, q) \text{ e } v_{II} = \max_{q \in \Delta(Y)} \min_{p \in \Delta(X)} \hat{u}_{II}(p, q)$$

avendo posto

$$\hat{u}_I(p, q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i q_j u_I(x_i, y_j)$$

e definendo analogamente  $\hat{u}_{II}$ .

Può sembrare ragionevole restringere le scelte ai soli elementi  $(u_1, u_2) \in \mathcal{E}(\Delta(X \times Y))$  che soddisfano le condizioni  $u_1 \geq v_I$  e  $u_2 \geq v_{II}$ .

Tutto quanto abbiamo visto finora può essere considerato come una premessa alla formalizzazione di cosa sia un problema di contrattazione (almeno dal punto di vista che è stato a suo tempo considerato da Nash).

**Definizione 4.2** *Diremo che un problema di contrattazione è una coppia  $(F, d)$ , dove:*

- $F \subseteq \mathbb{R}^2$ , chiuso e convesso
- $d \in \mathbb{R}^2$

L'interpretazione dovrebbe essere evidente:  $F$  rappresenta l'insieme di tutte le coppie di valori di utilità ai quali i due giocatori possono pervenire, e  $d = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$  rappresenta il "punto di disaccordo", cioè il valore che i giocatori possono ottenere in caso di mancato raggiungimento di un accordo.

**Osservazione 4.1** *Abbiamo identificato un problema di contrattazione con la coppia  $(F, d)$ . Ricordiamo anche che siamo arrivati a questa formulazione partendo da un gioco in forma strategica e cercando di vedere dove ci potesse condurre la possibilità di sottoscrivere accordi vincolanti. In particolare, abbiamo "suggerito" implicitamente di identificare  $F$  con  $\mathcal{E}(\Delta(X \times Y))$  e  $d$  con la coppia  $(v_I, v_{II})$ . Si noti tuttavia che:*

1. *quello sopra delineato non è l'unico modo possibile per trasformare un gioco strategico in un problema di contrattazione. In particolare, si possono impiegare altri approcci per identificare il punto di disaccordo.*
2. *l'approccio seguito può essere criticato per essere troppo rigidamente "welfarista". Con il modello che consideriamo, assumiamo che l'insieme  $F$  (con la sua interpretazione canonica, quale insieme delle coppie di valori di utilità sui quali i giocatori contrattano) rappresenti, assieme a  $d$ , tutte le informazioni rilevanti. Ciò può non essere vero. Solo per fare un esempio, aspetti procedurali possono essere importanti e naturalmente in questo approccio non possono emergere in modo esplicito (si noti però che potrebbero essere implicitamente incorporati nel tipo di soluzione che si andrà a scegliere).*

Formalizziamo il problema di contrattazione.

Indichiamo con  $\mathcal{B}$  l'insieme dei problemi di contrattazione dei quali ci occupiamo. Gli elementi di  $\mathcal{B}$  sono coppie  $(F, d)$ , dove:

1.  $F$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$ , chiuso e convesso
2.  $d = (\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in \mathbb{R}^2$
3.  $F \cap \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : u_1 \geq \bar{u}_1 \text{ e } u_2 \geq \bar{u}_2\}$  è non vuoto e limitato

Se in  $F$  c'è un elemento  $(u_1, u_2)$  con  $u_1 > \bar{u}_1$  e  $u_2 > \bar{u}_2$ , allora il problema di contrattazione  $(F, d)$  viene detto *essenziale*.

Per *soluzione* del problema di contrattazione (relativamente alla classe  $\mathcal{B}$  sopra individuata) intendiamo una applicazione  $\Phi$  definita su  $\mathcal{B}$  a valori in  $\mathbb{R}^2$ . L'idea è che ad ogni  $(F, d)$  siamo in grado di associare (univocamente!) una coppia  $\Phi(F, d) = (\Phi_1(F, d), \Phi_2(F, d))$  che rappresenti, in termini interpretativi, i valori di utilità assegnati rispettivamente ai due giocatori.

Come definire questa  $\Phi$ ?

L'approccio seguito da Nash non è stato quello di definire "a priori"  $\Phi$ . Ma di imporre condizioni "ragionevoli" che ogni soluzione  $\Phi$  dovrebbe soddisfare. E poi di provare che c'è una ed una sola  $\Phi$  che soddisfa tali condizioni.

Queste condizioni sono le seguenti:

1. **Efficienza forte:**  $\Phi(F, d) \in F$  ed è un ottimo paretiano forte per  $F$
2. **Razionalità individuale:**  $\Phi_1(F, d) \geq \bar{u}_1$  e  $\Phi_2(F, d) \geq \bar{u}_2$
3. **Co-varianza rispetto a cambiamenti di scala:** Per ogni  $\lambda_1, \lambda_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$  t.c.  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ , siano:

$$F' = \{(\lambda_1 u_1 + \gamma_1, \lambda_2 u_2 + \gamma_2) : (u_1, u_2) \in F\} \text{ e } d' = (\lambda_1 \bar{u}_1 + \gamma_1, \lambda_2 \bar{u}_2 + \gamma_2)$$

Allora

$$\Phi(F', d') = (\lambda_1 \Phi_1(F, d) + \gamma_1, \lambda_2 \Phi_2(F, d) + \gamma_2)$$

4. **Indipendenza dalle alternative irrilevanti:** Sia dato  $(F, d)$  e sia  $G \subseteq F$ ,  $G$  chiuso e convesso, t.c.  $\Phi(F, d) \in G$ . Allora  $\Phi(F, d) = \Phi(G, d)$
5. **Simmetria:** Se  $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$  e se  $(u_1, u_2) \in F \Leftrightarrow (u_2, u_1) \in F$ , allora  $\Phi_1(F, d) = \Phi_2(F, d)$

Si può allora enunciare il seguente:

**Teorema 4.1** *C'è una ed una sola soluzione  $\Phi$ , definita su  $\mathcal{B}$ , che soddisfa le condizioni 1), ..., 5). Inoltre, se  $(F, d)$  è essenziale, si ha che:*

$$\Phi(F, d) = \operatorname{argmax} (u_1 - \bar{u}_1)(u_2 - \bar{u}_2) \text{ con } (u_1, u_2) \in F, u_1 \geq \bar{u}_1, u_2 \geq \bar{u}_2$$

## 5 Critica del modello di contrattazione

Dunque il teorema di Nash è in grado di mettere d'accordo chiunque si trovi in una situazione come quella di sopra ed accetti le sue condizioni per un'equa spartizione.

Il primo assioma vuol mettere in luce un criterio di efficienza: non ha senso accontentarsi di un risultato, se entrambi i giocatori possono fare meglio. Dunque, anche ammettendo che i giocatori possano distruggere utilità, questo non può accadere all'equilibrio..

Il terzo assioma è detto di invarianza rispetto a trasformazioni di utilità. In pratica dice che se cambiamo unità di misura all'utilità del giocatore (i fattori  $h$  e  $k$ ) e aggiungiamo certe quantità iniziali (partendo dalle utilità  $a$  e  $b$ , per esempio, invece che  $0$  e  $0$ ), il risultato cambia tenendo conto esattamente dei fattori precedenti. Insomma non cambia, in sostanza, il risultato se lo si esprime in euro o in dollari (pur di esprimerlo sempre in euro o in dollari) e cambia delle stesse quantità se spostiamo i livelli zero di utilità.

Il quarto è chiamato indipendenza dalle alternative irrilevanti: se aggiungere a  $C$ , che è l'insieme delle utilità che i giocatori si possono garantire nella contrattazione, altri elementi, che portano a costruire un insieme più grande  $C'$ , porta come risultato a una situazione che già era in  $C$ , allora quest'ultima è già la soluzione per il gioco  $C$ . (Notare che il punto di disaccordo è lo stesso in entrambi i giochi). In altre parole, quello che abbiamo aggiunto a  $C$  non sono che alternative irrilevanti, appunto.

Il quinto, detto assioma di simmetria, è molto chiaro: significa che in un gioco simmetrico il risultato deve essere simmetrico. Se i giocatori sono indistinguibili dal punto di vista delle loro utilità e dal punto di partenza, il risultato deve essere lo stesso per ambedue.

Il modello di contrattazione di Nash è certamente molto interessante. Non è certo esente da critiche, però. E qui non parliamo delle osservazioni che si possono fare sugli assiomi. Bensì puntiamo l'attenzione sulle assunzioni "nascoste", che non sono di poco conto e che per di più rischiano di passare inosservate.

Vediamo ora alcuni problemi che sono emersi rappresentando una critica all'approccio assiomatico di Nash:

- Come si sceglie il punto  $d$ ? Non è facile fare una scelta se il gioco dato non è cooperativo. In realtà ci sono vari approcci: il max-min, un equilibrio di Nash,...
- analogamente, il "feasibility set"  $F$  è individuato con certezza? ogni  $F$  con le caratteristiche date (convesso, etc.) è un "feasibility set" per un qualche

problema di contrattazione? O ve ne sono alcuni che non si possono ottenere in questo modo?

- altre informazioni, oltre a quelle previste (e cioè  $(F, d)$ ), rappresentate in termini di valori di utilità, non hanno alcun rilievo in un problema di contrattazione? Non saremmo disposti a modificare le nostre opinioni se avessimo informazioni supplementari?
- per quale motivo  $\Phi$  deve essere un “singleton”? Ad esempio, un gioco strategico non ha in genere un unico equilibrio di Nash
- un'altra obiezione è più generale ed è una obiezione di fondo all'approccio assiomatico. Perché mai determinare una soluzione su una classe di giochi quando si ha a che fare con un gioco concreto? Dietro a questa impostazione c'è l'idea di una validità normativa. Ma anche da questo punto di vista la classe dei giochi che posso aspettarmi di giocare è assimilabile all'insieme dei problemi di contrattazione su cui si ha l'assiomatizzazione di Nash?
- In alcuni casi la soluzione dettata dal modello non è equa. Per esempio, se la spartizione della somma avviene tra due persone (I e II) la cui funzione di utilità assume i seguenti valori:

Moneta di I	Moneta di II	Utilità di I	Utilità di II	Prodotto
0	100	0.00	1.00	0.00
25	75	0.25	0.98	0.245
50	50	0.50	0.90	0.450
75	25	0.75	0.73	0.548
100	0	1.00	0.00	0.00

la soluzione di Nash offre 75 a I e 25 a II. Cio è eticamente ingiusto. In realtà la funzione di utilità dichiarata da I è la funzione dichiarabile da un “ricco”, mentre l'utilità dichiarata da II è più probabile per un “povero”. C'è dunque una ingiustizia?

Certamente sul piano etico siamo portati a pensare che sarebbe meglio dare di più al povero.

Ma l'ingiustizia non sembra essere nel modello di contrattazione, bensì nelle funzioni di utilità che vengono dichiarate dai due.

- le critiche più significative sono state fatte all'assioma dell'indipendenza dalle alternative irrilevanti. In effetti può non sembrare sensato che di fronte a nuove alternative la soluzione non debba mai cambiare. Nuove alternative possono cambiare la forza contrattuale di chi da queste viene privilegiato.

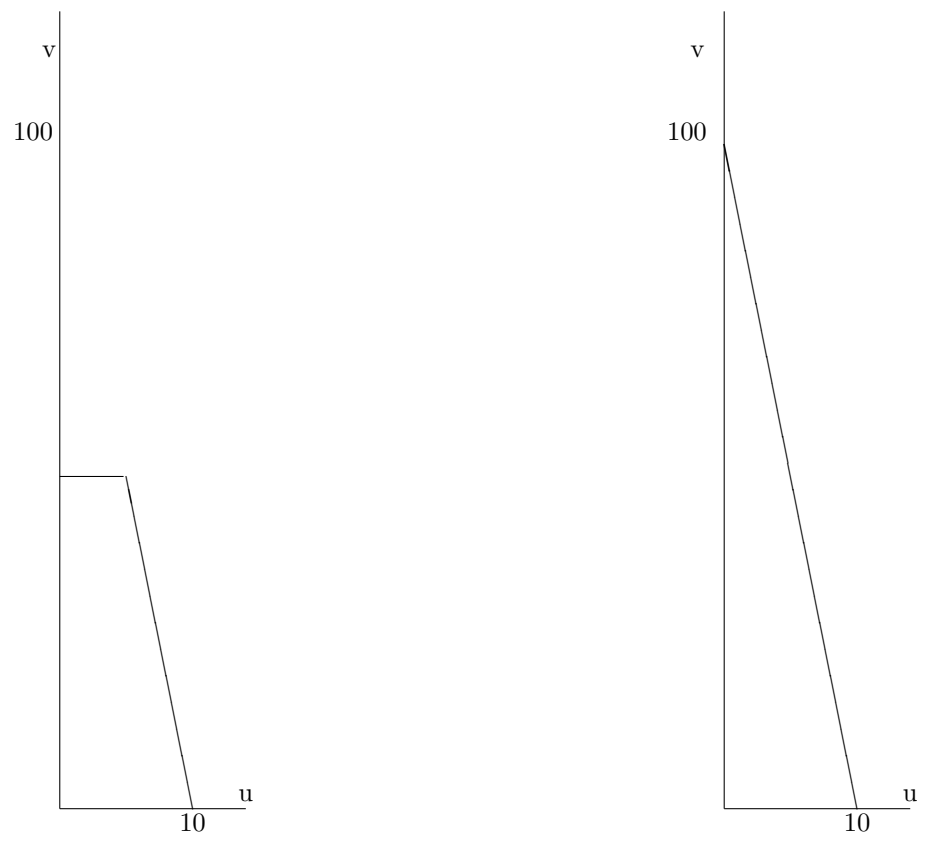


Figura 1: Gioco A e Gioco B

Osserviamo il seguente esempio illustrato nella figura 2:

Non sembra naturale che la soluzione dei due insiemi di contrattazione sia la stessa, in quanto le maggiori alternative presenti nel secondo modello potrebbero naturalmente privilegiare il secondo giocatore.