MATEMATICA PER LO STUDIO DELLE INTERAZIONI STRATEGICHE:
TEORIA DEI GIOCHI

Anna TORRE [1]

1 INTRODUZIONE

La teoria dei giochi è una disciplina matematica molto recente. La sua nascita viene convenzionalmente fissata con l'uscita del famoso libro di von Neumann-Morgenstern "Theory of Games and Economic Behavior"(Princeton University Press, 1944).

Naturalmente con questo non si vuol dire che prima del 1944 non ci siano stati importanti contributi allo studio matematico dei giochi, ma il libro di von Neumann e Morgenstern è il primo a proporre questo programma in maniera sistematica e soprattutto in relazione allo studio delle scienze sociali.

Già dalla fine del settecento c'era il progetto di estendere ad altri campi del sapere il metodo matematico che aveva rivoluzionato lo studio della fisica. I tentativi fatti erano più che altro volti a riproporre un modello molto simile a quello della fisica matematica. In quest'ottica si possono vedere i lavori di Walras sull'equilibrio economico generale. [2]

Nella prima parte del libro di von Neumann e Morgenstern è presente infatti una critica radicale alla teoria walrasiana dell'equilibrio economico generale, rea, secondo gli autori, di non tenere in considerazione l'influsso che le interazioni con gli altri individui hanno sulle decisioni di ogni singolo individuo. La vera rivoluzione non è usare i metodi matematici utili per lo studio della fisica applicandoli all'economia, ma costruire una "matematica nuova", che fornisca uno strumento adatto allo studio di questi argomenti: la teoria dei giochi.

Ai giorni nostri l'interesse della teoria dei giochi risiede solo in parte nelle sue pur molteplici e brillanti potenzialità applicative. Essa è in grado anche di proporre, in maniera originale, un criterio di interpretazione del momento dell'interrelazione strategica tra decisori.

Il libro di von Neumann e Morgenstern suscitò enormi attese ed ebbe un fortissimo impatto ma, dopo alcuni anni di successo, subentrò un periodo di sfiducia nella teoria dei giochi, che è diventata strumento importante per l'analisi economica solo dagli anni 80.

---

[1] Dipartimento di Matematica, Università di Pavia, Via Ferrata 1, 27100, Pavia, Italy. *E-mail: atorre@dimat.unipv.it*

[2] La formalizzazione matematicamente corretta e completa dell'equilibrio economico generale è stata fatta da Arrow e Debreu nel 1954

Una prima definizione della teoria dei giochi potrebbe essere questa:

È la disciplina che si occupa di situazioni di interazione strategica fra decisori, usualmente assunti essere “intelligenti” e “razionali”.

“Intelligenti” significa che capiscono la situazione in cui si trovano e sono in grado di fare ragionamenti logici di complessità indefinitamente elevata.

“Razionali” significa che hanno preferenze “coerenti” (transitive) sugli esiti finali del processo decisionale e che hanno l’obiettivo di **“massimizzare”** queste preferenze.

Essendo coinvolti più decisori, l’esito finale è determinato dalle scelte operate da tutti quelli coinvolti nella situazione.

Il problema delle preferenze sugli esiti induce una riflessione sulla cosidetta

teoria dell’utilità.

La teoria dell’utilità esula dagli scopi di queste lezioni e non può certo essere liquidata in poche parole: cercherò di riportare in maniera stringatissima solo quanto è indispensabile conoscere per comprendere la descrizione di un gioco.

Secondo l’economia politica classica (Smith, Ricardo, Marx), l’utilità coincide con una proprietà fisica dei beni. In una seconda fase (a partire da Bentham) l’utilità è intesa come una caratteristica intrinseca dei soggetti, ne misura in qualche modo il “benessere” o la “soddisfazione” in relazione a certi consumi: l’utilità è una funzione definita sull’insieme dei beni (o degli esiti del gioco). Si parla infatti di **“funzione di utilità”**.

Per quanto riguarda gli scopi che ci proponiamo in questo corso è sufficiente una riflessione generale sul fatto che ogni individuo ha una **“sua” funzione di utilità sull’insieme dei beni**.

Per esempio se l’insieme dei beni è costituito da una fetta di torta, un panino con il salame e un trancio di pizza, ognuno degli agenti sarà chiamato a quantificare numericamente le sua “utilità” per ciascuno dei tre beni in questione.

Non è richiesto che le utilità di due individui debbano essere le stesse: c’è chi preferisce il panino con il salame, chi la fetta di torta e chi la pizza.

Perché è importante conoscere le funzioni di utilità quando si descrive un gioco?

La motivazione è semplice. Alla fine del gioco ci sono esiti possibili rappresentati da “premi” che possono essere la solita terna {fetta di torta, panino con il salame, pizza} oppure dei premi in denaro, o semplicemente la soddisfazione di aver battuto l’avversario in un gioco di carte e il dispiacere dovuto alla sconfitta, o altro ancora.

Per stabilire quali sono i nostri obiettivi nel giocare dobbiamo sapere quantificare in qualche modo gli esiti del gioco. Potremmo anche desiderare la sconfitta se il nostro obiettivo è far felice il nostro avversario, o desiderare il pareggio se siamo dei perfetti egualitari. Se per qualcuno fare del bene è soddisfacente, questo è ciò che guida le sue azioni e deve essere implicito nella sua funzione di utilità.

Non importa "quali" sono i nostri obiettivi. Ciò che importa è soltanto che siano quantificabili.

Il termine **"razionalità"** in teoria dei giochi si riferisce alla proprietà transitiva nell'insieme delle preferenze: nel nostro esempio se un decisore preferisce il panino con il salame alla fetta di torta e la fetta di torta alla pizza **deve** preferire il panino con il salame alla pizza.

Una prima classificazione all'interno della teoria distingue fra giochi **non cooperativi** e **giochi cooperativi**.

La teoria cooperativa studia il formarsi di coalizioni tramite la possibilità di sottoscrivere accordi vincolanti, perchè questi possono essere di vantaggio ai singoli componenti.

La teoria non cooperativa si occupa dei meccanismi delle decisioni dei singoli, sulla base di ragionamenti individuali, in assenza di alleanze fra individui.

Questa distinzione non implica che nei giochi cooperativi siano presenti atteggiamenti più altruistici: le eventuali scelte altruistiche sono già nel modello e vengono rappresentate dalle funzioni di utilità dei singoli.

Si deve soprattutto a von Neumann l'idea di analizzare i giochi studiando il nascere delle coalizioni fra individui, mentre è Nash che ha dato impulso alla teoria non cooperativa.

Potremmo dire che la Teoria dei Giochi (TdG) è una disciplina molto seria con un nome fuorviante, che le è rimasto dal libro di Von Neumann e Morgenstern. [3]

In realtà i giochi in senso letterale (scacchi, carte, backgammon, etc) vengono usati come "palestre" per imparare a modellizzare interazioni economiche e sociali, qualcosa di analogo a quanto accade per i cosidetti "giochi d'azzardo" in relazione alla probabilità.

Osserviamo che un cosidetto "gioco" contro il caso (per esempio il lotto o la roulette) in cui c'è un solo giocatore che gioca contro la sorte non è un gioco (o meglio è un gioco degenere) nel senso della teoria dei giochi. Per esserci un gioco vero devono esserci almeno due individui razionali che interagiscono.

Per riassumere la TdG si occupa di situazioni in cui:

- interviene più di un decisore
- ogni giocatore detiene un controllo parziale
- i decisori hanno preferenze non necessariamente uguali sugli esiti

[3] Alcuni teorici della teoria dei giochi (Aumann per esempio) hanno proposto il nuovo nome "Teoria delle decisioni interattive" ma la proposta ha avuto poco seguito.

Si assume solitamente che i decisori:

- conoscano la situazione di interazione (conoscenza comune)
- possano scegliere tra diversi corsi d'azione
- siano intelligenti (molto intelligenti e senza limiti alle loro capacità di calcolo o deduzione).

La TdG è affascinante: affronta problemi difficili, è crocevia di discipline diverse (in particolare: matematica ed economia) e usa competenze attinte da vari settori matematici.

Elenco qui alcune delle applicazioni della TdG:

- teoria economica
- teoria della politica e scelte sociali
- giustizia distributiva
- teorie della giustizia
- evoluzione e selezione

A conclusione di questa chiacchierata introduttiva vorrei prendere in esame un esempio che al momento potrà solo servire a riflettere su quale è la differenza sostanziale tra un gioco contro il "caso" e un gioco contro un avversario intelligente con il quale dunque c'è interazione strategica. Naturalmente mi ripropongo di ristudiare il problema più avanti quando avremo a disposizione strumenti di analisi più precisi.

Esempio 1.1 *a)I giocatori (I e II) hanno a disposizione un'urna contenente* 5 *palline numerate da* 1 *a* 5*. Ciascuno dei due giocatori estrae dalla sua urna una pallina. Se la somma dei due numeri delle palline estratte è pari, vince II. Altrimenti vince I.*

Poichè le possibilità sono 25*, di cui* 13 *a favore di II e* 12 *favorevoli a I, il gioco viene vinto da II* 13 *volte su* 25 *e da I* 12 *volte su* 25*. Si usa dire che il gioco non è equo.*

Rappresentiamo la situazione con la seguente tabella nella quale il numero estratto dal primo giocatore corrisponde alla riga, il numero estratto dal secondo corrisponde alla colonna e nell'incrocio di una riga con una colonna ho messo 1 *quando vince il primo giocatore e* -1 *quando vince il secondo giocatore.*

I/II	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
1	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*
2	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*
3	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*
4	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*
5	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*

b)I giocatori (I e II) devono scegliere contemporaneamente e indipendentemente un numero tra 1 *e* 5*. Se la somma dei due numeri è pari, vince II. Altrimenti vince I. Rispetto alla situazione a) è cambiato qualcosa? Mettetevi nei panni del giocatore I. Cosa fareste?*

2 GIOCHI NON COOPERATIVI

Una importante classificazione che occorre fare nel contesto dei giochi discende dalla risposta alla seguente domanda:

"Vi è oppure no per i giocatori la possibilità di sottoscrivere accordi vincolanti?"

In presenza di questa possibilità si parla di **giochi cooperativi**, in caso contrario si parla di **giochi non cooperativi**.

Si noti che la differenza tra le due categorie di giochi non consiste in una maggiore o minore tendenza alla cooperazione dei giocatori: sia nei giochi non cooperativi che in quelli cooperativi i giocatori perseguono il proprio "utile" e niente altro. L'unica differenza è che nei giochi cooperativi esiste la possibilità di sottoscrivere accordi vincolanti, accordi cioè che si è tenuti a rispettare da un contratto, nei giochi non cooperativi questo non è ammesso. Una volta stabilito se si è in presenza di un gioco cooperativo o no, ci poniamo il problema di scegliere una formalizzazione adatta alla rappresentazione del gioco.

Per operare una descrizione formale dei giochi non cooperativi si è soliti ricorrere a due modalità rappresentative:

la **forma estesa** e la **forma strategica**.

Si dice che un gioco è **in forma estesa** quando la descrizione è fatta con un "albero": si tratta di costruire un grafo che, partendo dalla radice, descriva il gioco mossa per mossa, fino ad arrivare a presentare tutte le situazioni finali, ciascuna esito univoco di una data serie di mosse.

La **forma normale (o strategica)** invece precisa il numero dei giocatori, lo spazio delle loro strategie, e la funzione di utilità di ciascuno di loro. Si noti che le strategie in questa descrizione sono un dato del problema, mentre nella forma estesa abbiamo serie di mosse, ed un compito delicato di chi analizza il gioco è proprio quello di dedurre da queste le strategie di ogni giocatore.

Un'ulteriore e concettualmente decisiva distinzione è quella fra **giochi ad Informazione completa e giochi ad Informazione incompleta**.

In un gioco a **Informazione completa** le regole del gioco e le funzioni di utilità di tutti i giocatori sono conoscenza comune di entrambi i giocatori.

Questo assunto non è particolarmente realistico, potremmo anzi affermare che i giochi a informazione completa costituiscono solo un primo passo. L'ipotesi di informazione incompleta porta a una teoria più sofisticata ma anche più soddisfacente, proprio in quanto più aderente alla realtà. In effetti, nell'ambito di un fenomeno, ad esempio economico o biologico, accade di rado che tutte le informazioni siano note a tutti i protagonisti.

Forma estesa

Vediamo dapprima alcuni esempi di giochi finiti a due giocatori: l'estensione al caso di più giocatori è più complicata, sebbene non concettualmente diversa. Si usano comunemente due modi di formalizzare il gioco detti **"forma estesa"** e **"forma strategica"**.

La forma estesa consiste in una descrizione dettagliata di tutte le possibili partite. È stata introdotta da von Neumann e Morgenstern (1944) e formalizzata da Kuhn (1953)

Analizziamo qualche esempio:

Esempio 2.1 FIAMMIFERI

Ci sono due mucchietti di due fiammiferi ciascuno. Due giocatori a turno levano un certo numero (strettamente positivo) di fiammiferi tutti dallo stesso mucchio. Chi toglie l'ultimo fiammifero perde. Come formalizzare? L'idea è semplice. Basta costruire un albero. Cominciamo con il descrivere tutte le possibili mosse del primo giocatore all'inizio della partita. Cosa può fare il primo gicatore? Può togliere dal primo mucchietto uno o due fiammiferi oppure fare la stessa cosa dal secondo mucchietto. Naturalmente c' è simmetria tra le operazioni che si possono fare sul primo e sul secondo mucchietto e quindi possiamo pensare che possa solo togliere dal primo. Indichiamo con:

a *"toglie 1 fiammifero dal primo mucchietto"*
b *"toglie 2 fiammiferi dal primo mucchietto"*

A questo punto cosa può fare il secondo giocatore?
Se il primo giocatore ha scelto **a** *può scegliere le mosse:*

A *"toglie 1 fiammifero dal primo mucchietto"*
B *"toglie 1 fiammifero dal secondo mucchietto"*
C *"toglie 2 fiammiferi dal secondo mucchietto"*

Se il primo giocatore ha scelto **b** *può scegliere le mosse:*
D *"toglie 1 fiammifero dal secondo mucchietto"*
E *"toglie 2 fiammiferi dal secondo mucchietto"*

A questo punto se sono state scelte **b** *ed* **E** *il gioco è finito e ha vinto I.*
Altrimenti gioca I.
È chiaro capire cosa può fare I e poi II (cfr. Fig. 1):
Sono state indicate con:

c *"toglie 1 fiammifero dal primo mucchietto"*

d *"toglie 2 fiammiferi dal primo mucchietto"*

e *"toglie 1 fiammifero dal primo mucchietto"*

f *"toglie 1 fiammifero dal primo mucchietto"*

g *"toglie 1 fiammifero dal secondo mucchietto"*

F *"toglie 1 fiammifero dal primo mucchietto"*

G *"toglie 1 fiammifero dal secondo mucchietto"*

Avevamo detto che l'idea è semplice, ma metterla in pratica ha richiesto un po' di fatica.

Esempio 2.2 *Scacchi. L'idea è la stessa. Basta costruire un albero. Cominciamo con il descrivere tutte le possibili mosse del bianco all'inizio della partita. Poi, in corrispondenza di ogni mossa del bianco, descriviamo tutte le mosse del nero. E poi di nuovo col bianco, e così via. Ci interrompiamo nella costruzione dell'albero quando arriviamo ad una situazione nella quale la partita è pari o è vinta da uno dei due giocatori. Anche qui l'idea è semplice, ma dopo averci provato con i fiammiferi penso che a nessuno passi per la testa di metterla in pratica. Si tratta di un albero dai numerosissimi rami, però finito. Otterremo qualcosa del tipo:*

Esempio 2.3 *Morra cinese. Due giocatori contemporaneamente devono scegliere tra sasso, forbice e carta. Se i due giocatori scelgono lo stesso la partita è pari. Sasso*

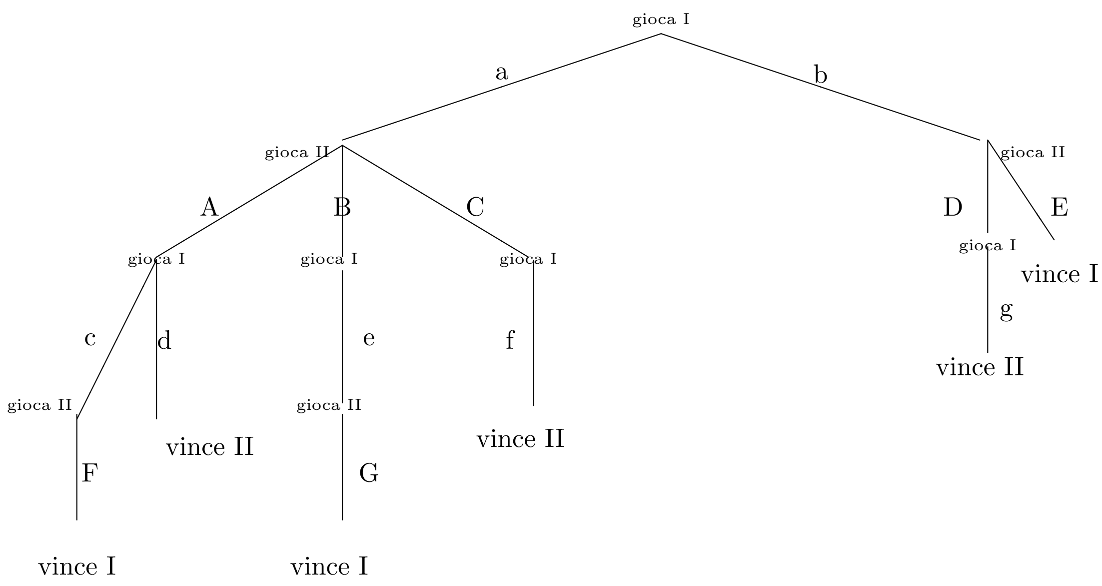


Figura 1: fiammiferi

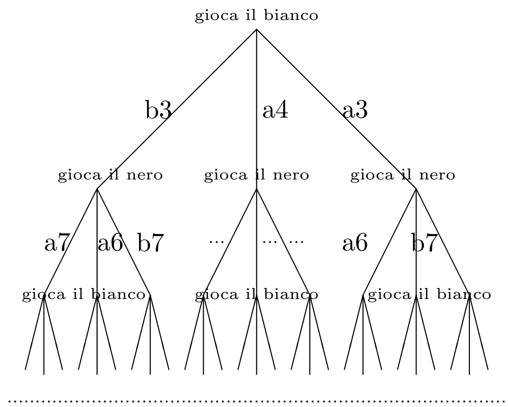


Figura 2: scacchi

vince su forbice, forbice vince su carta e carta vince su sasso. Qui c'è una novità nel senso che nel gioco ci sono mosse contemporanee. Come possiamo formalizzare una situazione come questa? Possiamo immaginare che le mosse siano una successiva all'altra ma che chi gioca la seconda volta non sia a conoscenza di ciò che ha fatto chi gioca la prima volta.

Qui c'è qualcosa di sostanzialmente diverso dalla situazione del gioco dei fiammiferi o di quello degli scacchi. Colui che deve giocare non conosce la mossa "precedente" dell'avversario. Quindi egli, pur trovandosi in un ben preciso vertice dell'albero, non sa in quale vertice si trovi.

Come possiamo descrivere una simile situazione? Possiamo "identificare" tutti i vertici che, sulla base dell'informazione disponibile al giocatore nel momento in cui lui deve giocare, possono corrispondere a quella data situazione. Possiamo raggruppare tutti i vertici tra cui il giocatore in quel momento non sa distinguere in quello che si usa chiamare **"insieme di informazione"**. *Se prendiamo due vertici appartenenti allo stesso insieme di informazione, da tali vertici deve uscire lo stesso numero di rami, infatti il giocatore non deve sapere in quale dei due vertici si trova.*

Notiamo subito che c'è una differenza evidente tra il gioco dei fiammiferi e quello della morra cinese: nel gioco dei fiammiferi ad ogni mossa ogni giocatore ha ben chiara davanti la situazione e sa esattamente tutto quello che è avvenuto prima nel gioco. Ciò non è vero per il gioco della morra cinese, perché nella morra cinese il giocatore non sa quale sia stata la mossa precedente dell'avversario. I giochi del tipo dei fiammiferi e degli scacchi si dicono **a informazione perfetta**. *Vedremo fra poco una definizione formale di questo concetto.*

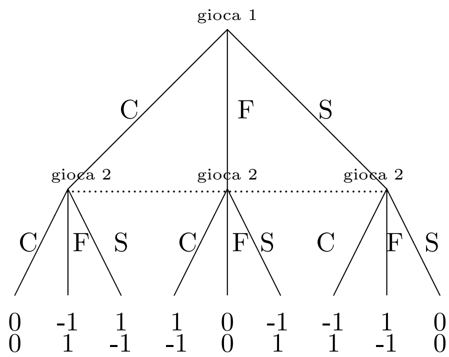


Figura 3: morra cinese

Riusciamo così a descrivere la contemporaneità usando insiemi di informazione con il grafo ad albero di Fig. 3. I numeri scritti nei vertici terminali rappresentano *il primo la vincita del primo giocatore e il secondo la vincita del secondo giocatore. 1 sta per vittoria e -1 sta per sconfitta e la linea tratteggiata unisce i vertici che stanno nello stesso insieme di informazione:*

Esempio 2.4 SCOPA

All'inizio c'è una mossa del caso, il cui esito è la distribuzione delle carte. Dopo la prima smazzata tocca giocare a chi non ha distribuito le carte. Anche qui c'è qualcosa di sostanzialmente diverso dalla situazione del gioco degli scacchi. Colui che deve giocare non conosce le carte dell'avversario, nè quelle che devono essere ancora distribuite. Quindi egli, pur trovandosi in un ben preciso vertice dell'albero, non sa in quale vertice si trovi. Questa situazione si ripete per tutto il gioco tranne che nell'ultima smazzata.

Come nel gioco della morra cinese possiamo "identificare" tutti i vertici che sulla base dell'informazione disponibile al giocatore nel momento in cui lui deve giocare possono corrispondere a quella data situazione. Ovviamente se prendiamo due vertici appartenenti allo stesso insieme di informazione, da tali vertici deve uscire lo stesso numero di rami, infatti il giocatore non deve sapere in quale dei due vertici si trova.

I giochi descritti finora sono tutti caratterizzati dal fatto che alla fine del gioco uno dei due giocatori vince oppure c'è pareggio.

Osservazione 2.1 In realtà qui si apre una parentesi che riguarda in generale la formalizzazione dei giochi. Alla fine dell'albero di una "game form" finita ci sono dei risultati: per esempio nei giochi che abbiamo visto finora alla fine c'è "vince I", oppure "vince II", potrebbe anche esserci "I vince una pizza" oppure "I deve baciare II. Fin qui non c'è ancora il gioco. Per avere il gioco occorre che i risultati alla fine della "game form" vengano interpretati dai singoli giocatori in termini della "funzione di utilità" di ciascuno di essi. In alcuni contesti vincere potrebbe non essere meglio che perdere: per esempio se il gioco è contro un bambino piccolo che se perde pianta una grana, potrebbe essere preferibile lasciarlo vincere.

Tenendo conto dell'osservazione, supponiamo di essere nel contesto in cui l'utilità maggiore di ogni giocatore è vincere, indichiamo convenzionalmente con 1 l'utilità della vittoria, con -1 l'utilità della sconfitta e con 0 l'utilità del pareggio. I giochi descritti finora con questa ulteriore condizione sulle funzioni di utilità sono a "somma zero".

Noi abbiamo convenzionalmente scritto 1 come utilità di un giocatore in caso di vincita, 0 in caso di pareggio e -1 in caso di sconfitta. Un gioco siffatto viene chiamato **a somma zero**.

Definizione 2.1 *Un gioco a due giocatori si dice* **a somma zero** *se in ogni possibile risultato l'utilità di ogni giocatore è uguale all'opposto dell'utilità dell'altro.*

Vediamo ora qualche gioco non a somma zero:

Esempio 2.5 DILEMMA DEL PRIGIONIERO
È uno dei problemi più noti della teoria dei giochi. Due individui a e b sono stati arrestati per lo stesso reato e vengono interrogati separatamente dal giudice: ognuno può scegliere indipendentemente dall'altro di confessare (C) o non confessare (NC). Se entrambi confessano vengono condannati a 5 anni di prigione ciascuno, se entrambi non confessano vengono condannati per reati minori a due anni ciascuno, se uno confessa e l'altro no, quello che confessa ha uno sconto di pena e viene condannato a un anno, mentre l'altro ha un'aggravante e viene condannato a sei anni. (Nei vertici finali del grafo ho scritto numeri negativi supponendo che l'utilità di un anno di prigione sia -1).

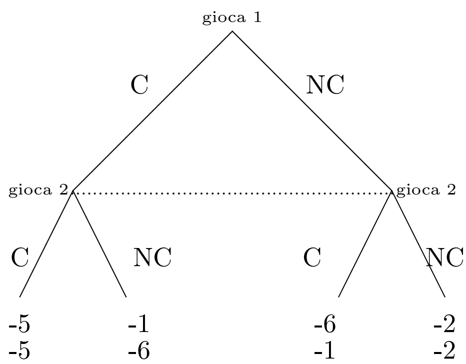


Figura 4: dilemma del prigioniero

Esempio 2.6 *Due fidanzati devono scegliere tra andare a teatro (T) o alla partita (P). Lei preferisce il teatro, mentre lui preferisce la partita, ma entrambi non hanno interesse a restare da soli. In termini di soddisfazione stare soli dà 0 a entrambi, il teatro dà* 2 *alla ragazza e* 1 *al ragazzo, mentre la partita dà* 2 *al ragazzo e* 1 *alla ragazza.*

Definizione 2.2 Un gioco in forma estesa si dice avere informazione perfetta se ogni insieme di informazione contiene un solo elemento.

Per esempio il gioco degli scacchi e della dama sono a informazione perfetta. I giochi di carte come la scopa o la briscola non sono a informazione perfetta. Nei nostri esempi i giochi 1 e 2 sono a informazione perfetta: gli altri no.

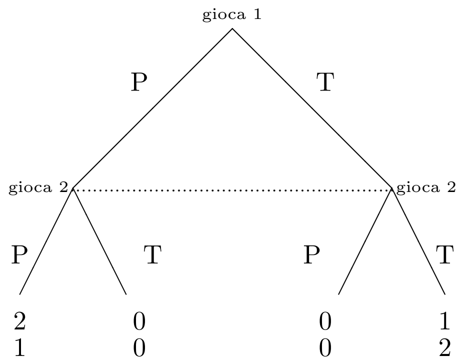


Figura 5: battaglia dei sessi

Forma strategica

Vediamo ora di descrivere la **forma strategica** di un gioco, introdotta da von Neumann e Morgenstern e così chiamata da Shubik (1982).

Scrivere un gioco **in forma strategica** significa che ciascuno dei due giocatori deve dichiarare che cosa farà in ciascuna delle situazioni in cui si può venire a trovare. Deve dichiarare in ogni nodo dell'albero di sua competenza cosa farà se si verrà a trovare in quel nodo. Per prima cosa, anche se è un po' noioso, cerchiamo di scrivere la forma strategica del gioco dei fiammiferi. Le strategie del primo giocatore sono:

s_1=**a,c** s_2=**a,d** s_3=**b,c** s_4=**b,d**

Le strategie del secondo sono:

t_1=**A,D** t_2=**A,E** t_3=**B,D** t_4=**B,E** t_5=**C,D** t_6=**C,E**

e il gioco in forma strategica

I/II	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
s_1	1	1	1	1	-1	-1
s_2	-1	-1	1	1	-1	-1
s_3	-1	1	-1	1	-1	1
s_4	-1	-1	-1	1	-1	1

dove il primo giocatore sceglie le righe della matrice e il secondo le colonne e 1 sta per "vince il primo", -1 sta per "vince il secondo".

Cerchiamo di scrivere in forma strategica il gioco della morra cinese. Qui il primo e il secondo giocatore hanno tre strategie ciascuno. Infatti, dopo che ha giocato il primo giocatore, il secondo non sa in quale vertice si trova e dunque non ha strategie del tipo: “se il primo gioca sasso, gioco carta; se il primo gioca carta gioco forbice; se il primo gioca forbice gioco sasso” che avrebbe invece se fosse a conoscenza del nodo in cui si trova, ma ha solo tre strategie: sasso, forbice, carta.

La forma strategica è:

	C	F	S
C	0	-1	1
F	1	0	-1
S	-1	1	0

dove, come si usa fare nel caso dei giochi a somma zero, abbiamo scritto solo il payoff (guadagno, o meglio utilità) del primo giocatore, restando inteso che quello del secondo è in ogni caso l’opposto.

Nel caso degli esempi 5 e 6 la forma strategica è chiara e subito scrivibile. Per il dilemma del prigioniero abbiamo la seguente forma strategica:

	C	NC
C	-5,-5	-1,-6
NC	-6,-1	-2,-2

dove il primo giocatore sceglie le righe della matrice e il secondo le colonne. Mentre per la battaglia dei sessi abbiamo la seguente:

	T	S
T	2,1	0,0
S	0,0	1,2

dove la ragazza sceglie le righe della matrice e il ragazzo le colonne.

Provate adesso a pensare cosa puo voler dire descrivere in forma strategica il gioco degli scacchi.

Un’ultima considerazione: Il passaggio dalla forma estesa a quella strategica sul piano concettuale (non su quello pratico) è semplice. Lo è altrettanto il passaggio inverso? In altre parole, dato un gioco in forma strategica è possibile sempre descriverlo in forma estesa? La risposta è: “sì in maniera banale se accettiamo che l'informazione non sia perfetta". Se invece la domanda è: Dato un gioco in forma strategica è possibile darne una versione in forma estesa come gioco a informazione perfetta? La risposta a questa domanda in generale è: "no, e anche quando è possibile non è unica la forma estesa che dà la forma strategica fissata".

Esercizio 2.1 *Trovare esempi*

3 SOLUZIONI: CASO NON COOPERATIVO

Giochi a somma zero

Dopo aver studiato i vari tipi di formalizzazione dei giochi, analizziamo ora i più accreditati concetti di soluzione. Per prima cosa vediamo il caso dei giochi non cooperativi a due persone, finiti e a somma zero.

Ricordiamo che un gioco G si dice **a somma zero** se per ogni terminazione del gioco la somma dei payoff è nulla. In altre parole tutto quello che viene guadagnato da un giocatore viene perso dall'altro.

In questo caso si utilizza una matrice A in cui la riga i è associata alla strategia s_i del giocatore I, la colonna j alla strategia t_j del giocatore II e l'elemento a_{ij} rappresenta quanto il primo giocatore riceve dal secondo se giocano la coppia di strategie (s_i, t_j). Resta inteso che il secondo giocatore riceve $-a_{ij}$

Abbiamo visto che questa si chiama la forma normale del gioco.

Esempio 3.1 *Consideriamo il gioco rappresentato in forma strategica dalle seguente matrice:*

I/II	t_1	t_2	t_3
s_1	*8*	*3*	*4*
s_2	*5*	*2*	*-2*
s_3	*9*	*-1*	*3*

Osserviamo la matrice: perché mai il primo giocatore dovrebbe scegliere la seconda riga quando per ogni possibile strategia adottata dal secondo lui ha un guadagno maggiore scegliendo la prima? Se lo facesse non sarebbe razionale.

Pertanto entrambi i giocatori sanno che la razionalità del primo impone di scartare la seconda riga e quindi che si trovano in realtà di fronte al gioco:

I/II	t_1	t_2	t_3
s_1	8	3	4
s_3	9	-1	3

Usando gli stessi criteri per il secondo giocatore (ma attenzione, il secondo giocatore paga i numeri scritti nella matrice e dunque il peggio per lui è pagare il massimo!) possiamo eliminare la prima colonna e trovarci con:

I/II	t_2	t_3
s_1	3	4
s_3	-1	3

e poi ancora la terza riga (il primo preferisce risultati maggiori)

I/II	t_2	t_3
s_1	3	4

e quindi la terza colonna (il secondo preferisce risultati minori):

I/II	t_2
s_1	3

Abbiamo usato il metodo cosidetto della
eliminazione iterata di strategie strettamente dominate.

Il risultato è che II paga 3 a I. Chiaramente l'esempio che ho fatto è stato scelto ad hoc affinchè tutto funzioni e alla fine si trovi un' unica uscita sensata per il gioco.

Esempio 3.2 *Cosa accade quando non è così?*

I/II	t_1	t_2	t_3
s_1	*8*	*3*	*5*
s_2	*5*	*2*	*-2*
s_3	*7*	*6*	*-3*

ho cambiato solo qualche numero. Ancora come prima il primo giocatore elimina la seconda riga e di conseguenza il secondo elimina la prima colonna. Ma a questo punto si ottiene:

I/II	t_2	t_3
s_1	3	5
s_3	6	-3

e i due non possono continuare in quest'ordine di idee perché per ciascuno di essi la preferenza per una strategia piuttosto che per un'altra dipende dalla strategia adottata dall'altro. Che cosa possono fare?

Possono cercare di fare il meno peggio. Per esempio I sa che usando s_1 il peggio che gli può succedere è vincere 3 mentre adottando s_3 è pagare 3. Dunque, se è pessimista, sceglie la prima strategia. Analogamente il secondo giocatore sceglierà t_3.

Vediamo di generalizzare questo procedimento: Cosa fa il primo giocatore "pessimista"? Guarda in corrispondenza ad ogni strategia che lui può adottare qual è il peggio che gli può capitare: su ogni riga della matrice guarda qual' è il payoff minore. Tra questi payoff calcola il massimo e gioca la strategia corrispondente. In questo senso si dice che adotta

la strategia di *maxmin* detta anche "strategia conservativa".

Cosa fa il secondo giocatore se si comporta allo stesso modo? Teniamo conto del fatto che per il secondo giocatore i numeri scritti nella matrice sono quello che deve pagare e quindi cercherà in ogni colonna (che corrisponde a una sua strategia fissata) il valore massimo. Tra questi massimi sceglierà quindi il minimo. Si dice che adotta

la strategia di *minmax* detta anche "strategia conservativa"

La vincita minima per il giocatore I si indica con v'_I e si ha:

$v'_I = max_i\{min_j a_{ij}\}$

La perdita massima per il giocatore II si indica con v'_{II} e si ha:

$v'_{II} = min_j\{max_i a_{ij}\}$

È facile verificare che $v'_I \leq v'_{II}$

Le strategie conservative rappresentano quello che ciascun giocatore può procurarsi indipendentemente dall'altro. In altre parole nessun giocatore intelligente che vuole massimizzare il suo guadagno accetterà mai di guadagnare di meno di quello che gli offre la sua strategia conservativa, cioe v'_I e il secondo non accetterà mai di pagare più di v'_{II}.

Nel caso dell'esempio di prima abbiamo $v'_I = 3$ e $v'_{II} = 5$, e quindi $v'_I < v'_{II}$
Se entrambi adottano la strategia conservativa, il risultato è che il primo giocatore vince 5. È sensato questo risultato? Naturalmente il secondo giocatore che deve pagare 5 preferirebbe cambiare strategia e pagare 3. Ma questo il primo giocatore lo sa e quindi anche lui preferisce cambiare strategia per vincere 6, ma questo il secondo giocatore lo sa e preferirebbe cambiare e vincere 3, ma questo il primo lo

sa e preferirebbe cambiare ancora e vincere 5 e si ritorna alla situazione iniziale. In questo caso le strategie conservative portano a un circolo vizioso.

Vediamo invece cosa accade in un caso in cui il *maxmin* coincide con il *minmax*:

Esempio 3.3

I/II	t_1	t_2	t_3
s_1	*-5*	*5*	*0*
s_2	*2*	*-2*	*1*
s_3	*4*	*3*	*2*

In questo caso le strategie conservative sono s_3 per il primo giocatore e t_3 per il secondo e $v'_I = v'_{II} = 2$. Questo significa che ciò che il primo giocatore è in grado di garantirsi coincide con ciò che il secondo è disposto a pagare. La soluzione “2” è stabile, in quanto ciascuno dei due non ha convenienza a cambiarla (perché starebbe peggio).

Questo è un fatto generale.

Se $v'_I = v'_{II}$ quello che il primo giocatore è in grado di garantirsi è esattamente uguale alla quantità massima che il secondo è disposto a pagare. In questo caso nessuno dei due ha convenienza a cambiare strategia perché se la cambia prende di meno.

Se $\bar{\imath}$ è la strategia di *maxmin* per il primo giocatore e $\bar{\jmath}$ è la strategia di *minmax* per il secondo giocatore si ha in questo caso:

(*) $a_{\bar{\imath},j} \leq a_{\bar{\imath}\bar{\jmath}} \leq a_{i,\bar{\jmath}}$

per ogni i e j.

Se c'è uguaglianza tra il *minmax* e il *maxmin* la relazione (*) dice che nessuno dei due giocatori ha interesse a deviare dalla sua strategia conservativa.

Esempio 3.4 *Vediamo un altro esempio in cui non c'è uguaglianza tra il maxmin e il minmax:*

I/II	t_1	t_2	t_3
s_1	*0*	*1*	*2*
s_2	*1*	*4*	*-1*
s_3	*3*	*-1*	*0*

In questo caso il *maxmin* è 0 e il *minmax* è 2, : il primo giocatore può procurarsi da solo 0 mentre il secondo è disposto a pagare 2. Se entrambi giocano la strategia selezionata il risultato è 2, ma chiaramente il secondo giocatore non è contento perche sa che il primo al massimo può ottenere 0. Potrebbe allora giocare la prima colonna per ottenere 0, ma questo il primo giocatore lo sa e allora potrebbe giocare la terza riga, e allora.........questa soluzione nel caso in cui il *maxmin* non coincide con il *minmax* non è stabile.

Naturalmente se, come negli esempi 3.1 e 3.3, si ha un solo elemento che sopravvive alla eliminazione iterata di strategie strettamente dominate, questo soddisfa alla condizione di essere ottenuto con strategie conservative e alla condizione $maxmin = minmax$. Il viceversa non è vero come dimostrano gli esempi 3.2 e 3.4.

A questo punto la situazione sembra un po' intricata: ci sono alcuni giochi che hanno "soluzioni sensate" e altri no. E tutto sembra dipendere dai numeretti che rappresentano i payoff in una maniera che è difficile da formalizzare. Come uscire da questa situazione? L'idea di von Neumann è quella di usare le cosidette **"strategie miste"**, cioè di immergere lo spazio delle strategie in uno spazio più grande in cui le nuove strategie sono distribuzioni di probabilità sulle vecchie strategie, che ora chiameremo **strategie pure**.

STRATEGIE MISTE

Consideriamo il seguente esempio:

Esempio 3.5

I/II	t_1	t_2
s_1	*1*	*-1*
s_2	*-1*	*1*

In questo gioco chiaramente il *maxmin* è -1 mentre il *minmax* è 1. Quindi non c'è equilibrio. In questo caso la scelta di nessuna delle due strategie sembra sensata. Se il giocatore I gioca la prima strategia e il secondo non lo sa, grosso modo metà delle volte vince 1 e metà delle volte perde 1, mentre se il secondo lo capisce il primo perde sempre 1. Se il gioco è ripetuto un po' di volte è intuitivo che non conviene adottare sempre la stessa strategia. L'idea è proprio questa: se il giocatore I gioca la prima strategia con una certa probabilità p (la seconda verrà ovviamente giocata con probabilità $1 - p$) e lo stesso fa il secondo giocatore (la prima strategia con probabilità q e la seconda con probabilità $1 - q$) ci sarà un payoff atteso.

Attenzione: abbiamo cambiato lo spazio delle strategie, facendolo diventare molto più grande.

Una strategia per il primo giocatore è adesso rappresentata da un numero p compreso tra 0 e 1, mentre una strategia per il secondo da un numero q compreso tra 0 e 1. Come calcoliamo il payoff dei giocatori in corrispondenza ai valori p e q delle strategie? Semplicemente calcoliamo il payoff atteso, che nel nostro caso per il primo giocatore è:

$f(p, q) = pq \cdot 1 + p(1-q) \cdot (-1) + q(1-p) \cdot (-1)1 + (1-p)(1-q) \cdot 1 = (2p-1)(2q-1)$

Naturalmente il payoff atteso del secondo è il suo opposto.

La situazione è radicalmente cambiata. Gli spazi di strategie sono infiniti, quindi se vogliamo trovare il *maxmin* e il *minmax* adesso lo dobbiamo cercare non più su un insieme finito (l'insieme delle strategie "pure" dei giocatori) ma sull'insieme delle distribuzioni di probabilità sull'insieme delle strategie pure, che è un insieme infinito ma (per chi conosce questa terminologia) compatto.

Per il primo giocatore cerchiamo $max_p min_q f(p,q) = max_p (4p-2)q - 2p + 1$. Si vede facilmente che questo valore è 0 e viene realizzato per $\bar{p} = \frac{1}{2}$ Analogamente il *minmax* vale 0 e viene realizzato per $\bar{q} = \frac{1}{2}$.

In questo caso si vede facilmente che $\bar{p} = \frac{1}{2}$ e $\bar{q} = \frac{1}{2}$ sono soluzione del problema. Data la simmetria del gioco, potevamo aspettarci la simmetria della soluzione: in questo ambito più generale la soluzione di $maxmin = minmax$ sta nel giocare con uguale probabilità la prima e la seconda strategia per entrambi i giocatori. In questo modo il valore atteso (0) è meglio del vecchio *maxmin* (calcolato in strategie pure) per il primo e meglio del *minmax* in strategie pure per il secondo. I due valori $\bar{p} = \frac{1}{2}$ e $\bar{q} = \frac{1}{2}$ tali che

$f(p,\bar{q}) \leq f(\bar{p},\bar{q}) = max_p min_q f(p,q) = min_q max_p f(p,q) \leq f(p,\bar{q})$

per ogni p e q in [0,1]. Inoltre, se uno dei due giocatori decide di usare questa strategia mista, l'altro non può fare nulla per contrastarlo, perchè qualunque cosa faccia si procura lo stesso o meno. Abbiamo pagato il prezzo di rendere molto più grande lo spazio delle strategie, ma abbiamo trovato una soluzione soddisfacente.[4]

Per chi conosce un po' di linguaggio formale scrivo le definizioni precise:

Definizione 3.1 *Si chiama strategia mista per un giocatore una distribuzione di probabilità sull'insieme delle sue strategie (pure).*

Indichiamo con X l'insieme delle strategie miste del giocatore I e con Y l'insieme delle strategie miste del giocatore II.

Definizione 3.2 *Dato un gioco G a due giocatori a somma zero in forma normale con matrice A è detta vincita attesa se il giocatore I gioca la strategia mista x e il giocatore II gioca la strategia mista y la quantità:*

$A(x,y) = \sum_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1,\ldots,m} x_i a_{ij} y_j =^t xAy$

Teorema 3.1 Teorema del *minmax* (von Neumann, 1928) *Ogni gioco finito a somma zero e a due giocatori in strategie miste soddisfa la proprietà che $maxmin = minmax$. I valori delle distribuzioni di probabilità che realizzano il $maxmin = minmax$ non sono necessariamente unici, ma se $(\bar{p},\bar{q})$ e (p',q') realizzano il $maxmin = minmax$ allora $f(\bar{p},\bar{q}) = f(p',q') = f(\bar{p},q') = f(p',\bar{q})$ e inoltre $f(p,\bar{q}) \leq f(\bar{p},\bar{q}) \leq f(\bar{p},q)$ per ogni altra coppia di distribuzioni di probabilità p e q.*

[4]Questo fatto non deve sorprendere: si pensi ad esempio al problema della soluzione delle equazioni algebriche che se collocato nell'insieme dei numeri interi o razionali o reali non sempre ha soluzione mentre è sempre risolubile pur di collocarsi in campo complesso.

Giochi non a somma zero

Passiamo ora allo studio dei giochi non a somma zero, quelli in cui il guadagno del primo giocatore non necessariamente coincide con la perdita del secondo.

Vediamo prima di tutto perché in questo caso le strategie di *maxmin* non sono ragionevoli. Consideriamo il gioco:

I/II	t_1	t_2
s_1	1,2	7,7
s_2	2,0	0,-1

La strategia *maxmin* per il primo giocatore è s_1 e quella del secondo (non siamo più a somma 0 e dunque entrambi cercano la strategia *maxmin*) è t_1. In questo caso l'uscita corrispondente alle strategie conservative è instabile, in quanto ciascuno dei due giocatori, se pensa che l'altro giochi la sua strategia di *maxmin*, ha convenienza a deviare. Ma questa volta il risultato corrispondente all'adottare per I la strategia s_1 e per II la strategia t_2 sembra più ragionevole del precedente perché entrambi i giocatori prendono 7 e ciascuno dei due resta penalizzato se cambia strategia.

L'idea di Nash è proprio questa:

Il risultato del gioco dipende da quello che fanno entrambi i giocatori, ma se I sa cosa fa II, allora il risultato dipende solo da lui e simmetricamente per II

Una coppia di strategie è accettabile in questo senso se nessuno dei due giocatori ha interesse a deviare unilateralmente.

Vale la pena di dare una definizione più formale:

Definizione 3.3 DI EQUILIBRIO DI NASH
Consideriamo il gioco:
$(X,\ Y,\ f,\ g,\ X \times Y \to \mathbf{R})$
dove X e Y sono gli spazi di strategie, e f, g sono le funzioni di utilità dei giocatori
$(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ *si dice* **equilibrio di Nash** *se*

1 $f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}) \quad \forall x \in X$

e

2 $g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y) \quad \forall y \in Y$

Vediamo qualche esempio di equilibrio di Nash:

Nel dilemma del prigioniero la coppia di strategie (C, C) è l'unico equilibrio di Nash. Questa è anche l'unica coppia di strategie che sopravvive alla eliminazione iterata di strategie strettamente dominate.

Osserviamo che la coppia di strategie (NC, NC) domina strettamente la coppia (C, C). Purtroppo però essa non è una coppia di strategie di equilibrio.

Nella battaglia dei sessi ci sono due equilibri di Nash in strategie pure che corrispondono alle coppie di strategie (T, T) e (P, P) e un equilibrio in strategie miste che corrispone a giocare per la ragazza T con probabilità $\frac{2}{3}$ e per il ragazzo T con probabilità $\frac{1}{3}$

Verificarlo per esercizio.

Qui di equilibri ce ne sono addirittura 3. Pensiamo per un momento solo ai due equilibri in strategie pure. Il guaio è che:

Se i due hanno la possibilità di parlarsi prima e di concordare una coppia di strategie di equilibrio quale delle due sceglieranno? I preferisce l'equilibrio (T, T), mentre II preferisce l'equilibrio (P, P).

Oppure i due giocatori non hanno questa possibilità e devono scegliere quale strategia giocare "al buio". In questo caso, non è facile capire come giocare. Perché I potrebbe decidere di giocare T, in quanto mira all'equilibrio che gli dà il maggior guadagno. Per le stesse identiche ragioni II potrebbe decidere di giocare P. Risultato: entrambi guadagnano 0, anziché il 2 sperato.

A questo punto abbiamo gli strumenti per analizzare il gioco delle cinque dita (esempio 1.1). Dimostriamo che la seguente coppia di strategie:

$s_I = t_{II}$: "gioco 1 con probabilità $\frac{1}{2}$, 2 con probabilità $\frac{1}{2}$ e $3, 4, 5$ con probabilità 0, cioè non li gioco"

è un equilibrio di Nash del gioco delle cinque dita. Infatti, se f è il payoff del primo giocatore si ha:

$f((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0), (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)) = \frac{1}{2}(p_1 + p_3 + p_5) - \frac{1}{2}(p_2 + p_4) + \frac{1}{2}(p_2 + p_4) - \frac{1}{2}(p_1 + p_3 + p_5) = 0$ Questo significa che se il primo giocatore adotta la strategia s_I, si procura 0 come payoff atteso qualunque strategia adotti il secondo giocatore.

Analogamente si potrebbe vedere per il secondo giocatore. Osserviamo che la coppia di strategie $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ per I e II non è invece un equilibrio di Nash.(verificarlo!)

Alla base della definizione di equilibrio di Nash vi sono alcuni presupposti. Per capirli, dobbiamo però precisare l'interpretazione che avevamo dato del gioco. Cioè,

I sceglie quale strategia usare nell'ambito delle strategie che ha a disposizione: ovverossia, sceglie un elemento $\bar{x} \in X$. Analogamente II sceglie $\bar{y} \in Y$. La cosa importante da pensare è che i due giocatori effettuino le loro scelte contemporaneamente ed indipendentemente. Di più: se intendiamo trattare una situazione di gioco non cooperativo, dobbiamo tenere presente che i giocatori non possono effettuare tra di loro degli accordi vincolanti. Immaginiamo che i due giocatori si mettano d'accordo per giocare, l'uno la strategia $\bar{x}$ e l'altro la strategia $\bar{y}$. Se vogliamo che questo accordo sia un minimo sensato, sembra ragionevole richiedere che resista a considerazioni del tipo seguente

Il giocatore I riflette:

"Bene, ci siamo accordati per giocare in quel modo: visto che se violo l'accordo non mi succede nulla, vediamo un po' se posso far di meglio anzichè giocare la $\bar{x}$ che si era detto. Le possibilità sono due: o l'altro giocatore non rispetta l'accordo, e allora inutile tenerne conto, oppure lo rispetta. In questo secondo caso, vediamo un po' se non c'è un'altra strategia x per cui $f(x, \bar{y}) > f(\bar{x}, \bar{y})$"

Affinché $(\bar{x}, \bar{y})$ sia ragionevole occorre che resista a tentazioni di questo tipo, cioè appunto

$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}) \quad \forall x \in X.$

La stessa riflessione del giocatore II porta all'altra condizione

$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(\bar{x}, y) \quad \forall y \in Y$

La definizione di equilibrio di Nash è strutturata proprio in modo da tenere conto di queste considerazioni: le condizioni (1) e (2) dicono proprio che nessuno dei due giocatori ha convenienza a deviare dalla strategia che gli è "prescritta" dall'equilibrio, a condizione che neppure l'altro giocatore "devii"'.

Di solito, quando si parla di equilibri, si usa chiamarli equilibri di Nash o di Cournot-Nash. La ragione è la seguente:

Nash [5] nel 1950 prova un importante teorema il quale garantisce l'esistenza di un equilibrio per una classe molto ampia ed importante di giochi, estendendo al caso generale il risultato di von Neumann per i giochi a somma zero (cioè quelli per cui $f(x, y) + g(x, y) = 0$ per ogni $(x, y) \in X \times Y$).

Cournot nel 1838 aveva "anticipato" la TdG adottando, come "soluzione" per un modello di oligopolio, proprio questa idea di equilibrio.

Il merito di Nash sta nell'aver dimostrato l'esistenza di almeno un equilibrio (di Nash) in ipotesi abbastanza generali. Vale infatti il

Teorema 3.2 TEOREMA DI NASH

Siano X e Y sottoinsiemi chiusi, convessi e limitati di $\mathbf{R^n}$, f e g funzioni continue , inoltre valgano le proprietà:

[5] Nash, John F. Jr. [1950]: Equilibrium Points in n-Person Games, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 36, 48-49.

$x \to f(x, , y)$ è quasi concava per ogni y fissato
$y \to g(x, y)$ è quasi concava per ogni x fissato
Allora esiste almeno un equilibrio di Nash.

Definizione 3.4 *Una funzione h di una variabile si dice* **quasi concava** *se per ogni numero reale k, l'insieme*
$A_k = \{x \quad h(x) \geq k\}$
è convesso.

Il teorema del *minmax* di von Neumann è un caso particolare di questo teorema: infatti nel caso dei giochi finiti a somma zero, gli spazi delle strategie miste dei giocatori sono convessi, le funzioni di utilità sono lineari e una coppia di strategie è un equilibrio di Nash se e solo se sono conservative e $maxmin = minmax$.

La dimostrazione del teorema di Nash usa il teorema di punto fisso di Kakutani applicato alla multiapplicazione di miglior risposta

$$MR : X \times Y \longrightarrow X \times Y$$

così definita:
$MR(x, y) = \{(\bar{x}, \bar{y}) \ : \ f(\bar{x}, y) \geq f(x', y) \quad \forall x' \in X \ \text{ e } g(x, \bar{y}) \geq g(x, y') \quad \forall y' \in Y\}$

4 UN ESEMPIO CLASSICO:IL DUOPOLIO DI COURNOT

Cournot ha anticipato la definizione di equilibrio di Nash nel contesto di un particolare modello di duopolio. Descriverò ora il modello di duopolio di Cournot.

Il modello è così costituito. Ci sono:
2 imprese = 2 giocatori
strategie = diverse quantità prodotte
$X = Y = [0, +\infty)$ spazio delle strategie.

$$\varphi_1(x, y) = x[a - (x + y) - k]$$

$$\varphi_2(x, y) = y[a - (x + y) - k]$$

dove φ_i per $i = 1, 2$ è il payoff dei due giocatori (cioè i profitti).

$x =$ quantità di merce prodotta dall'impresa I

$y =$ quantità di merce prodotta dall'impresa II

Il prezzo di mercato di una unità di merce è:

$$P(Q) = P(x+y) = \begin{cases} a-(x+y) & \text{se } x+y<a \\ 0 & \text{se } x+y \geq a \end{cases}$$

e il costo totale dell'impresa i per produrre q_i è kq_i.

La coppia di strategie x_1 e y_1 è un equilibrio di Nash se
$\varphi_1(x_1,y_1) \geq \varphi_1(x,y_1) \quad \forall x \in [0,+\infty)$

e analogamente
$\varphi_2(x_1,y_1) \geq \varphi_2(x_1,y) \quad \forall y \in [0,+\infty)$

La soluzione di questa coppia di disequazioni risulta essere
$x_1 = y_1 = \frac{a-k}{3}$
Infatti la condizione necessaria è:

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = -2x + (a-k-y) = 0 \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = -2y + (a-k-x) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{a-k-y}{2} \\ -2y + (a-k-(\frac{a-k-y}{2})) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{a-k-y}{2} \\ -2y + (\frac{a-k}{2} + \frac{y}{2}) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{a-k-y}{2} \\ y = \frac{a-k}{3} \end{cases}$$

$$x = \frac{a-k-(\frac{a-k}{3})}{2} = \frac{\frac{2}{3}(a-k)}{2} = \frac{a-k}{3}$$

Il candidato al Nash è $(\frac{a-k}{3}, \frac{a-k}{3})$.

Si deve provare che:

$a)$ $\varphi_1(\frac{a-k}{3}, \frac{a-k}{3}) \geq \varphi_1(x, \frac{a-k}{3}) \quad \forall x \in [0,a]$

$b)$ $\varphi_2(\frac{a-k}{3}, \frac{a-k}{3}) \geq \varphi_2(\frac{a-k}{3}, y) \quad \forall y \in [0,a]$

$a)$ è equivalente a

$$-\left(\frac{a-k}{3}\right)^2 + \left(a-k-\frac{a-k}{3}\right)\frac{a-k}{3} \geq -x^2 + \left(a-k-\frac{a-k}{3}\right)x$$

e anche a

$$-\frac{(a-k)^2}{9}+\frac{2}{3}(a-k)\frac{a-k}{3}=\frac{(a-k)^2}{9}\geq -x^2+\frac{2}{3}(a-k)x$$

e a

$$x^2-\frac{2}{3}(a-k)x+\frac{(a-k)^2}{9}\geq 0$$

che si riscrive come $\left(x-\frac{(a-k)}{3}\right)^2\geq 0$.

L'ultima disequazione è sempre verificata, dunque è sempre verificata anche a). Analoghi conti provano la b), quindi la coppia $(\frac{a-k}{3},\frac{a-k}{3})$ è equilibrio di Nash.

Osservazione 4.1 *Osserviamo che le due imprese, producendo la strategia di Nash ottengono:*
$\varphi_1(\frac{a-k}{3},\frac{a-k}{3})=\varphi_2(\frac{a-k}{3},\frac{a-k}{3})=\frac{(a-k)^2}{9})$

mentre se producessero $\frac{a-k}{4}$ *ciascuna otterrebbero:*
$\varphi_1(\frac{a-k}{4},\frac{a-k}{4})=\varphi_2(\frac{a-k}{4},\frac{a-k}{4})=\frac{(a-k)^2}{8})$

5 INDUZIONE A RITROSO

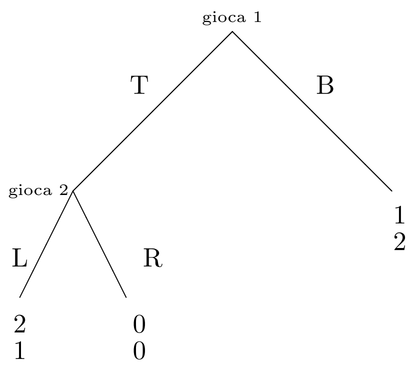
Se un gioco è dato in forma estesa ed è finito e a informazione perfetta, un modo per trovare equilibri di Nash in strategie pure è dato dal cosidetto metodo dell'induzione a ritroso. L'idea è la seguente: si osservano gli ultimi nodi nei quali un giocatore è chiamato a giocare e si suppone (coerentemente con le ipotesi di razionalità e intelligenza) che in questi nodi il giocatore scelga la strategia che gli offre il payoff maggiore. Nei nodi precedenti, il giocatore che è chiamato a giocare sa cosa farà l'ultimo giocatore in quanto egli conosce il gioco e sa che l'ultimo giocatore è intelligente e razionale. Così lui si comporta come se in realtà fosse l'ultimo a giocare, in quanto il payoff che ottiene giocando ciascuna strategia gli è noto perché sa quali saranno le conseguenze della sua scelta. In questo modo si proceede passo dopo passo ...in conclusione nel primo nodo il giocatore che è chiamato a scegliere in base alle ipotesi di conoscenza comune della razionalità e intelligenza di tutti i giocatori, in realtà sa già cosa succederà in corrispondenza ad ogni sua scelta. Naturalmente chi è abituato a questo tipo di ragionamenti sa che stiamo raccontando in maniera molto intuitiva un procedimento di induzione.

Definizione 5.1 *Un sottogioco G' di un gioco G in forma estesa a informazione perfetta è il gioco formato da un nodo di G e da tutti i suoi successori in G.*

6 RAFFINAMENTI DELL'EQUILIBRIO DI NASH

Tutto ciò ci porta alla definizione di "equilibrio perfetto nei sottogiochi" (SPE: subgame perfect equilibrium), che è dovuto a Selten (1965).

Se ci limitiamo, per semplicità, ai giochi ad informazione perfetta, la condizione che imponiamo è che non solo si abbia un equilibrio, ma che tale resti anche quando "restringiamo" le strategie ai sottogiochi del gioco dato. Per gioco ad informazione perfetta la definizione di sottogioco è semplicissima: si tratta di considerare un generico nodo e prenderlo come "radice" del gioco. Osserviamo che il metodo della induzione a ritroso per trovare un equilibrio di Nash in un gioco ad informazione perfetta fornisce, in realtà, un equilibrio perfetto nei sottogiochi. Si consideri il seguente gioco (in forma estesa):



Quale risultato ci si può attendere? Tenendo conto dei presupposti di razionalità ed intelligenza dei giocatori, possiamo pensare che I giochi T. Infatti I prevede che, quando tocca a II scegliere, egli sceglierà L, visto che gli dà un risultato migliore di R (infatti II ottiene un payoff pari ad 1 se gioca L, mentre se sceglie R ottiene 0). Visto che il payoff risultante per I dalle scelte T ed L è addirittura il migliore che lui possa avere in questo gioco, ci possiamo davvero attendere che egli scelga T. D'altronde, le scelte T ed L sono anche quelle che emergono dall'applicazione dell'induzione a ritroso.

Possiamo, comunque, scrivere la forma strategica del gioco e trovarne gli equilibri di Nash:

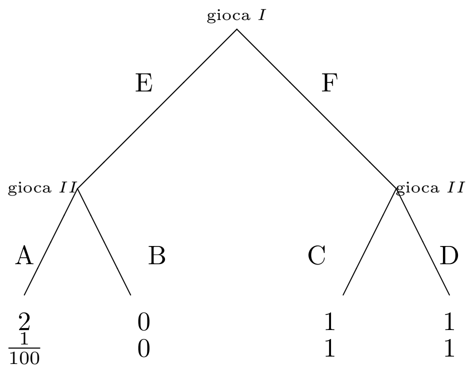
$I\backslash II$	L	R
T	$2,1$	$0,0$
B	$1,2$	$1,2$

Si vede immediatamente che questo gioco ha *due* equilibri (in strategie pure): (T, L) e (B, R): il primo è perfetto nei sottogiochi, il secondo no. Quale è il senso del nuovo equlibrio che abbiamo trovato, ovvero (B, R)?
Possiamo interpretarlo come risultato di una minaccia (di "ritorsione") da parte di II: se I non gioca B (che dà a II il risultato migliore possibile), allora II per ritorsione giocherà R, "punendo" il giocatore I. Va notato, tuttavia, che I punisce anche se stesso! La scelta di R non è infatti ottimale per II, che ottiene un payoff migliore giocando L.
Come è possibile che un equilibrio di Nash preveda per un giocatore una scelta non ottimale? La risposta è facile: in realtà, l'equilibrio (B, R) non prevede affatto che II giochi davvero R; la scelta di B fa terminare il gioco e quindi II non deve affettivamente fare questa scelta. Più in generale, un equilibrio di Nash può prevedere delle scelte non ottimali da parte dei giocatori, ma queste scelte avvengono in nodi dell'albero che non vengono raggiunti, se viene appunto giocato quanto previsto dall'equilibrio.

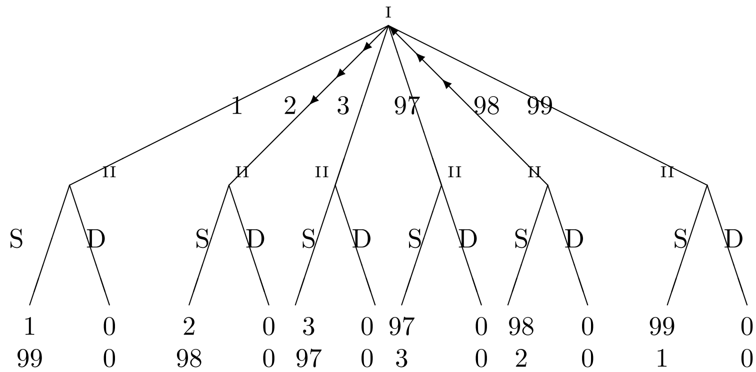
D'altro canto, l'equlibrio (B, R) sembra comunque essere meno attendibile di quanto non lo sia (T, L). In effetti, la "minaccia" da parte di II di giocare R è ben poco attendibile: se I lo ignora e gioca T, a questo punto, per la sua stessa razionalità, II giocherà L. Utilizzando la forma estesa, abbiamo scoperto che non tutti gli equilibri di Nash sono "uguali".

Se l'idea di equilibrio perfetto nei sottogiochi permette di eliminare alcuni equilibri di Nash, per così dire "inferiori", non ci si deve però aspettare che scompaiano tutti i problemi.
Basta considerare questi esempi:

Esempio 6.1 *Troviamo gli equilibri di Nash perfetti nei sottogiochi per il seguente gioco in forma estesa e riflettiamo sul comportamento che il giocatore I potrebbe avere se dovesse davvero giocare.*



In questo caso c'è un unico SPE. Ma certo il giocatore II potrebbe essere "incattivito" se I fa la scelta prevista dal SPE. In effetti, questo gioco assomiglia al cosiddetto "ultimatum game", che è forse il più studiato a livello della Teoria dei Giochi sperimentale.
Il gioco avviene così : su un tavolo ci sono 100 monete da 1 euro. Il giocatore I deve fare una proposta di spartizione, indicando quante monete lui vuole prendere (da 1 a 99). Dopo di che tocca a II, che può scegliere tra due opzioni: accetta la proposta di spartizione di I oppure rifiuta. Nel caso in cui rifiuti, entrambi i giocatori non prendono nulla.
Possiamo disegnare (in parte) il gioco in forma estesa:

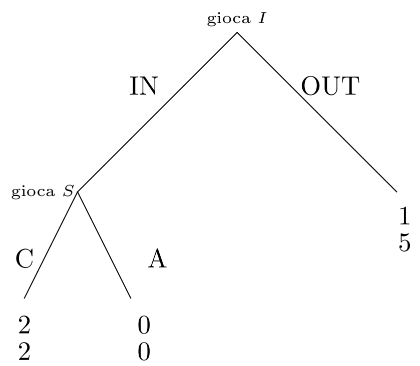


È immediato verificare che il SPE prevede che I scelga 99 monete per sè e che II accetti. Nella realtà effettiva, la probabilità che II accetti, qualora I tenga per sè più una settantina di monete, è molto bassa. Una prima spiegazione di questi risultati difformi della predizione della Teoria dei Giochi è basata sul fatto che le preferenze del giocatore II non tengono conto solo dei soldi. Ma potrebbero (possono!) incorporare altri fattori: aspetti di "giustizia", o di "rivalsa", od altro.
Ciò non toglie che, comunque, l'esperimento possa essere fatto in condizioni controllate e che anche in questo contesto si ottengano divaricazioni importanti tra quanto prevede la teoria e quanto avviene nella realtà.

Vi sono altri esempi in cui un SPE risulta essere problematico. Un paio sono molto famosi: il "chain store paradox" (Selten, Theory and Decision, 1978) e il "centipede" (Rosenthal, Journal of Economic Theory, 1981).
Nel caso del "chain store paradox", abbiamo un giocatore (la catena di supermercati) che si confronta in sequenza con vari giocatori (nell'esempio di Selten sono 20, ciascuno in una città diversa). Ciascuno dei quali può decidere se aprire oppure no un supermercato. Rinvio alla lettura del lavoro originario di Selten per i dettagli e

per le molte ed interessanti considerazioni che fa.
Il gioco è costituito da una sorta di "ripetizioni" di questa struttura (che è analoga all'esempio che abbiamo usato per introdurre gli SPE):

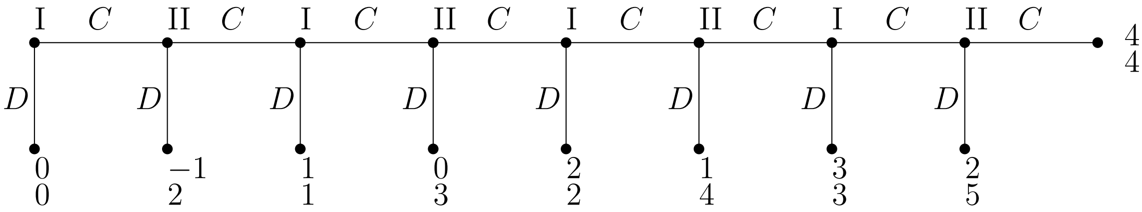
L'idea è che il giocatore I può decidere se aprire un supermercato (IN) oppure no (OUT). Se non lo apre, ovverossia se non fa concorrenza alla catena di supermercati S, la catena S guadagna 5 (perchè non trova concorrenza) mentre lui resta con il capitale che aveva, cioè 1. Se uno apre il supermercato, la reazione di S può essere di due diversi: A (A sta per "aggressiva"), oppure C (C sta per "conciliante"). La scelta A potrebbe corrispondere, ad esempio, ad una guerra di prezzi, che porta di fatto sia I che S a non guadagnare nulla (anzi, I perde anche il capitale che aveva). Se invece la scelta è C, di fatto i due si spartiscono il mercato. È evidente che l'equilibrio perfetto nei sottogiochi è *(IN,C)*.



Disegnare l'albero che si ottiene nel caso di due potenziali concorrenti.

Se anzichè esserci due potenziali rivali, ce ne sono venti (come nell'esempio originale di Selten), S ricaverebbe un guadagno ben maggiore ($20 \cdot 5$ anzichè $20 \cdot 2$) se riuscisse a convincerli che lui adotterebbe una strategia aggressiva. Insomma, l'idea di SPE non contempla l'utilità che può avere per un giocatore costruirsi una "reputazione": lo obbliga, se così si può dire, a fare delle scelte miopi, pur se razionali. L'esempio di Rosenthal mostra alcuni aspetti interessanti. Uno è che l'esito di un SPE può essere inefficiente. Ma questo non è certo una novità. Mostra anch'esso una sorta di "miopia" nelle strategie che i giocatori vengono "obbligati" a giocare se si accetta l'idea di SPE. L'aspetto però più interessante riguarda un problema di contraddittorietà nelle argomentazioni che stanno alla base dell'idea di SPE.
Il gioco è il seguente (volendo, lo si può "allungare" a piacimento, per rendere ancora più stridenti le difficoltà che emergono):

Esempio 6.2 *Il centipede*



Il risultato è inefficiente. Ed un po' di "capacità di vedere lontano" dovrebbe portare i giocatori a non "defezionare" subito dal gioco.

Ma c'è un problema ancor più grave. Si pensi al ragionamento che fa II quando "defeziona" la terza volta in cui tocca a lui giocare. Perchè "defezionare"? Perchè ritiene (da induzione a ritroso) che nella mossa successiva I defezionerebbe. Ma se II si trova davvero a dover giocare la sua terza mossa, ciò è solo perché I ha deciso per ben tre volte di comportarsi in modo diverso da come prescrive lo SPE (ed anche II stesso, si noti!). Appare quindi un pò curioso che II "defezioni" ipotizzando un comportamento futuro di "razionalità" da parte di I, che se fosse stato adottato in passato non avrebbe certamente portato II a dover giocare!

I SPE sono un cosiddetto "raffinamento" degli equilibri di Nash che sfrutta la forma estesa. Sono però stati proposti altri raffinamenti che utilizzano solo la forma strategica. Mi limito a citare gli equilibri perfetti (introdotti da Selten nel 1975). Vediamo solo un esempio.

Qui abbiamo due equilibri di Nash (in strategie pure): (T, L) e (B, R). Ma solo (T, L) è "perfetto".

$I\backslash II$	L	R
T	$1, 1$	$0, 0$
B	$0, 0$	$0, 0$

L'idea di equilibrio perfetto è basata sul fatto che il giocatore non è in grado di evitare errori. E quindi un equilibrio dovrebbe essere, per così dire, "limite" di equilibri che si ottengono "obbligando" i giocatori ad effettuare errori.

7 GIOCHI RIPETUTI

L'idea dei giochi ripetuti è la seguente: se un gioco viene giocato un'unica volta non c'è alcun motivo per cooperare se non c'è un contratto scritto, ma se il gioco viene ripetuto possiamo pensare che la non cooperazione a un certo stadio del gioco potrebbe significare che negli stadi successivi l'altro giocatore potrebbe non cooperare più e allora l'incentivo alla cooperazione potrebbe essere più forte. Si tratta di vedere come si costruisce una norma sociale. Come formalizzare questo aspetto della vicenda?

Chiaramente i comportamenti saranno diversi se i giocatori hanno un orizzonte temporale breve o un orizzonte temporale lungo (infinito). I risultati nei due casi sono diversi. La differenza tra orizzonte finito e infinito peraltro è più una differenza di percezione della durata del gioco da parte dei giocatori che non una situazione effettivamente reale. In generale un modello di orizzonte finito è piu ragionevole quando i giocatori percepiscono chiaramente il periodo finale, mentre quello con orizzonte infinito quando i giocatori dopo ogni periodo pensano che il gioco continuerà per un periodo ancora. Altrimenti, visto che la vita è finita, potremmo modellizzare solo orizzonte finito.

Torniamo ora al problema dei giochi ripetuti e studiamo separatamente il caso dell'orizzonte temporale finito e infinito.

7.1 Orizzonte temporale finito

In caso di ripetizione finita occorre evidenziare due risultati:

- se il gioco possiede un solo equilibrio di Nash in strategie pure, il gioco ripetuto con orizzonte temporale finito ha un unico equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi che consiste nel giocare ad ogni passo la strategia di equilibrio

- Se il gioco ha più di un equilibrio di Nash, allora il gioco ripetuto può avere degli equilibri di Nash perfetti nei sottogiochi in cui in qualche passo i giocatori non giocano una strategia di equilibrio del gioco componente.

Il primo di questi due risultati può essere illustrato analizzando il dilemma del prigioniero:

	C	NC
C	-5,-5	-1,-6
NC	-6,-1	-2,-2

Questo gioco ha un unico equilibrio di Nash in cui ogni giocatore sceglie C, inoltre per ogni giocatore l'azione C domina strettamente l'azione NC, in modo che la razionalità della scelta (C,C) ha una notevole forza. Ripetiamo due volte il gioco.

Ricordiamo che la scelta è sempre simultanea, quindi i giocatori scelgono due volte ma sempre simultaneamente. Rispetto al gioco in una sola mossa la differenza qui è che essi possono osservare l'esito della prima volta che giocano e poi muovere la seconda. Abbiamo quindi quattro sottogiochi, tutti relativi alla seconda ripetizione, che possiamo classificare così:

- 1) nella prima ripetizione le mosse sono (C,C)
- 2) nella prima ripetizione le mosse sono (C,NC)
- 3) nella prima ripetizione le mosse sono (NC,C)
- 4) nella prima ripetizione le mosse sono (NC,NC)

La matrice delle vincite del sottogioco 1 è la seguente:

	C	NC
C	-10,-10	-6,-11
NC	-11,-6	-7,-7

L'equilibrio di Nash è dunque (C,C)
La matrice delle vincite del gioco 2 è

	C	NC
C	-5,-11	-1,-12
NC	-6,-12	-2,-8

L'equilibrio di Nash è dunque (C,C). Lo stesso accade per i sottogiochi 3 e 4. (Scrivere i payoff)

Esempio 7.1 *Si consideri la seguente modifica del dilemma del prigioniero:*

I/II	*D*	*C*	*S*
D	*5,5*	*3,6*	*0,0*
C	*6,3*	*4,4*	*0,0*
S	*0,0*	*0,0*	*1,1*

Gli equilibri di Nash sono (C,C) e (S,S). In realtà le vincite migliori per entrambi i giocatori sono quelle relative alle strategie (D,D) dove entrambi ottengono 5.

Supponiamo ora di ripetere il gioco due volte.

Notiamo per prima cosa che le strategie di ciascun equilibrio giocate entrambe le volte costituiscono un equilibrio di Nash e quindi nel gioco ripetuto si ritrovano gli equilibri di Nash del gioco di partenza. Tali equilibri sono anche perfetti nei sottogiochi

Consideriamo anche la seguente strategia:

Scelgo D nel periodo 1, nel periodo 2 scelgo C se nel primo periodo le azioni osservate sono (D,D), altrimenti scelgo S.

Se entrambi i giocatori adottano questa strategia si ottiene ancora un equilibrio perfetto nei sottogiochi.

Per verificarlo occorre considerare 9 sottogiochi nel periodo 2, ciascuno corrispondente di una delle 9 coppie di strategie possibili nel primo gioco.

7.2 Giochi infinitamente ripetuti

Se un gioco viene ripetuto infinite volte si possono otterere risultati differenti; in particolare acquistano rilevanza i concetti di minaccia e di punizione, come e più che nel caso di orizzonte finito con più equilibri di Nash. Ad esempio se il dilemma del prigioniero è ripetuto infinite volte non si può applicare il ragionamento basato sull'induzione a ritroso, per cui la minaccia

"se non cooperi io non coopererò mai più "

acquista un peso diverso. Il risultato più importante è il cosidetto "Folk's Theorem".

Teorema 7.1 *Dato un gioco G a due giocatori ad informazione completa, sia* (e_1, e_2) *il vettore dei payoff di un qualsiasi equilibrio di Nash di G e sia* (x_1, x_2) *un vettore di payoff ammissibili per G; se* $x_i > e_i, i = 1, 2$ *allora se il tasso di sconto è sufficientemente vicino ad 1, esiste un equilibrio perfetto nei sottogiochi del gioco infinitamente ripetuto il cui payoff medio è* (x_1, x_2).

In altre parole, se i giocatori sono sufficientemente pazienti, cioè se considerano rilevanti le vincite future (δ tende a 1) qualsiasi esito che domina debolmente quello dell'equilibrio di Nash del gioco a un solo stadio è ottenibile da un equilibrio perfetto nei sottogiochi. Un tipo di strategie spesso utilizzate sono le cosidette "trigger strategies (strategie di ritorsione)".

Vediamo un esempio sempre riferito al dilemma del prigioniero. Supponiamo che entrambi i giocatori adottino la seguente strategia:

T "Nel primo periodo scelgo NC e successivamente scelgo NC se e solo se in tutti i periodi precedenti ho osservato (NC,NC), in caso contrario da quel momento in poi scelgo C."

Calcoliamo le vincite di ciascun giocatore.

Se entrambi scelgono la strategia T sopra scritta ottengono :

$u_I(T) = u_{II}(T) = -2 + \delta(-2) + \delta^2(-2) + \delta^3(-2) + ... = \frac{1}{1-\delta}(-2)$

Se I adotta un'altra strategia D_i che al passo i-esimo gli fa scegliere C per la prima volta, e II adotta T, ottiene $u_I(D_i) = -2 + \delta(-2) + \delta^2(-2) + ...\delta^{i-1}(-2) + \delta^i(-1) + \delta^{i+1}(-5)..... =$

$-2 + \delta(-2) + \delta^2(-2) + ...\delta^{i-1}(-2) + \delta^i(-1) + \delta^{i+1}\frac{1}{1-\delta}(-5)$

Si ha
$u_I(D_i) \leq u_I(T) \Leftrightarrow \delta \geq \frac{1}{4}$
infatti: $\delta^i(-1) + \delta^{i+1}\frac{1}{1-\delta}(-5) \leq \delta^i \frac{1}{1-\delta}(-2) \Leftrightarrow \delta \geq \frac{1}{4}$
Analogo discorso si può fare per II.

Quindi, se il tasso di sconto è maggiore di $\frac{1}{4}$, la coppia di strategie (T, T) è un equilibrio di Nash.

8 STRATEGIE CORRELATE E CONTRATTAZIONE

Consideriamo un gioco in forma strategica: (X, Y, u_I, u_{II}), dove X è l'insieme delle strategie del primo giocatore e Y è l'insieme delle strategie del secondo, u_I è la funzione di utilità di I e u_{II} è la funzione di utilità di II.

Per semplicità supponiamo che X ed Y siano insiemi finiti.
Supponiamo che sia possibile stringere accordi vincolanti, cioè consideriamo il gioco da un punto di vista cooperativo. Si noti che i giocatori possono decidere non solo di giocare una coppia di strategie $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$, ma possono anche accordarsi su una strategia correlata μ su $X \times Y$.

Indichiamo con $\Delta(X)$ l'insieme di tutte le distribuzioni di probabilità su X e analogamente con $\Delta(Y)$ e $\Delta(X \times Y)$ rispettivamente l'insieme di tutte le distribuzioni di probabilità su Y e su $X \times Y$.

Definizione 8.1 *Una strategia correlata è una distribuzione di probabilità su $X \times Y$.*

Ciò significa che i giocatori possono accordarsi su una distribuzione di probabilità qualunque su $X \times Y$, anzichè scegliere ciascuno una distribuzione di probabilità sul suo spazio di strategie e considerare la distribuzione di probabilità su $X \times Y$ che si ottiene dall'assunto che le due distribuzioni su X e Y siano indipendenti. Se supponiamo che $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ ed $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$, allora una strategia correlata μ è individuata da una matrice μ_{ij}, dove μ_{ij} è la probabilità assegnata da μ alla coppia di strategie pure (x_i, y_j).
Il *payoff atteso* da parte del giocatore I, se viene "giocata" la strategia μ, è:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} u_I(x_i, y_j)$$

Questo è il valore atteso di u_I rispetto alla distribuzione di probabilità μ su $X \times Y$. Possiamo indicarlo con: $E_\mu(u_I)$. Analogamente per II indichiamo il valore atteso di u_{II} con $E_\mu(u_{II})$.

Data la strategia μ, otteniamo quindi $(E_\mu(u_I), E_\mu(u_{II}))$: si tratta di una coppia di numeri reali che quindi possiamo rappresentare nel piano cartesiano. Abbiamo quindi una funzione $\mathcal{E} : \Delta(X \times Y) \longrightarrow \mathbf{R}^2$.
Ci interessa l'*immagine* di $\mathcal{E}$, cioè $\mathcal{E}(X \times Y)$. Essa è l'involucro convesso dell'insieme

$$\{(u_I(x_i, y_j), u_{II}(x_i, y_j) : i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n\}$$

Esempio 8.1 *(dilemma del prigioniero) Consideriamo il gioco:*

$I \setminus II$	L	R
T	3 3	0 5
M	5 0	1 1

L'insieme $\mathcal{E}(X \times Y)$ è tratteggiato in figura.

Si verifica che $\mathcal{E}(X \times Y)$ è un sottoinsieme chiuso, convesso e limitato di $\mathbb{R}^2$.
Possiamo pensare che i giocatori si accordino per giocare una strategia correlata μ t.c. $\mathcal{E}(\mu)$ sia efficiente. Non è però altrettanto agevole immaginare su quale specifica μ si possano accordare: sarebbe interessante poter individuare un criterio di scelta che ci metta in grado di fare previsioni (o prescrizioni).
Prima di affrontare questo compito, sarà opportuno fare una pausa di riflessione, per introdurre qualche ulteriore elemento utile ai fini del nostro problema. Se è vero che l'insieme $\mathcal{E}(X \times Y)$ rappresenta tutte le coppie dei valori dei payoff che i due giocatori possono ottenere sottoscrivendo accordi vincolanti per giocare una strategia correlata, ciò non di meno non è ragionevole immaginare che *tutti* gli accordi possano venire prevedibilmente sottoscritti. Ad esempio, nel dilemma del prigioniero un contratto che preveda di giocare la coppia di strategie (T, R) (con probabilità 1, s'intende) sarà difficilmente sottoscritto dal giocatore I, visto che lui, giocando B, è in grado di *garantirsi comunque* un payoff almeno pari ad 1.
Più in generale, possiamo immaginare che siano un importante punto di riferimento per i due giocatori i loro rispettivi valori di maxmin.
Ricordiamo che, se abbiamo un gioco finito (X, Y, u_I, u_{II}), è naturale considerare

il valore di maxmin valutato sulla estensione mista del gioco. Pertanto, porremo

$$v_I = max_{p \in \Delta(X)} min_{q \in \Delta(Y)} \hat{u}_I(p,q) \text{ e } v_{II} = max_{q \in \Delta(Y)} min_{p \in \Delta(X)} \hat{u}_{II}(p,q)$$

avendo posto

$$\hat{u}_I(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j u_I(x_i, y_j)$$

e definendo analogamente $\hat{u}_{II}$.
Può sembrare ragionevole restringere le scelte ai soli elementi $(u_1, u_2) \in \mathcal{E}(\Delta(X \times Y))$ che soddisfano le condizioni $u_1 \geq v_I$ e $u_2 \geq v_{II}$.
Tutto quanto abbiamo visto finora può essere considerato come una premessa alla formalizzazione di cosa sia un problema di contrattazione (almeno dal punto di vista che è stato a suo tempo considerato da Nash).

Definizione 8.2 *Diremo che un problema di contrattazione è una coppia* (F, d), *dove:*

- $F \subseteq \mathbb{R}^2$, *chiuso e convesso*
- $d \in \mathbb{R}^2$

L'interpretazione dovrebbe essere evidente: F rappresenta l'insieme di tutte le coppie di valori di utilità ai quali i due giocatori possono pervenire, e $d = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ rappresenta il "punto di disaccordo",cioè il valore che i giocatori possono ottenere in caso di mancato raggiungimento di un accordo.

Osservazione 8.1 *Abbiamo identificato un problema di contrattazione con la coppia* (F, d). *Ricordiamo anche che siamo arrivati a questa formulazione partendo da un gioco in forma strategica e cercando di vedere dove ci potesse condurre la possibilità di sottoscrivere accordi vincolanti. In particolare, abbiamo "suggerito" implicitamente di identificare* F *con* $\mathcal{E}(\Delta(X \times Y))$ *e* d *con la coppia* (v_I, v_{II}). *Si noti tuttavia che:*

1. *quello sopra delineato* non è l'unico modo possibile *per trasformare un gioco strategico in un problema di contrattazione. In particolare, si possono impiegare altri approcci per identificare il punto di disaccordo.*
2. *l'approccio seguito può essere criticato per essere troppo rigidamente "welfarista". Con il modello che consideriamo, assumiamo che l'insieme* F *(con la sua interpretazione canonica, quale insieme delle coppie di valori di utilità*

sui quali i giocatori contrattano) rappresenti, assieme a d, tutte le informazioni rilevanti. *Ciò può non essere vero. Solo per fare un esempio, aspetti procedurali possono essere importanti e naturalmente in questo approccio non possono emergere in modo esplicito (si noti però che potrebbero essere implicitamente incorporati nel tipo di soluzione che si andrà a scegliere).*

Formalizziamo il problema di contrattazione.
Indichiamo con $\mathcal{B}$ l'insieme dei problemi di contrattazione dei quali ci occupiamo. Gli elementi di $\mathcal{B}$ sono coppie (F, d), dove:

1. F è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, chiuso e convesso
2. $d = (\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in \mathbb{R}^2$
3. $F \cap \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : u_1 \geq \bar{u}_1 \text{ e } u_2 \geq \bar{u}_2\}$ è non vuoto e limitato

Se in F c'è un elemento (u_1, u_2) con $u_1 > \bar{u}_1$ e $u_2 > \bar{u}_2$, allora il problema di contrattazione (F, d) viene detto *essenziale*.
Per *soluzione* del problema di contrattazione (relativamente alla classe $\mathcal{B}$ sopra individuata) intendiamo una applicazione Φ definita su $\mathcal{B}$ a valori in R^2. L'idea è che ad ogni (F, d) siamo in grado di associare (univocamente!) una coppia $\Phi(F, d) = (\Phi_1(F, d), \Phi_2(F, d))$ che rappresenti, in termini interpretativi, i valori di utilità assegnati rispettivamente ai due giocatori.
Come definire questa Φ?
L'approccio seguito da Nash non è stato quello di definire "a priori" Φ, ma di imporre condizioni "ragionevoli" che ogni soluzione Φ dovrebbe soddisfare. E poi di provare che c'è una ed una sola Φ che soddisfa tali condizioni.
Queste condizioni sono le seguenti:

1. **Efficienza forte**: $\Phi(F, d) \in F$ ed è un ottimo paretiano forte per F
2. **Razionalità individuale**: $\Phi_1(F, d) \geq \bar{u}_1$ e $\Phi_2(F, d) \geq \bar{u}_2$
3. **Co-varianza rispetto a cambiamenti di scala**: Per ogni $\lambda_1, \lambda_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, siano:

   $$F' = \{(\lambda_1 u_1 + \gamma_1, \lambda_2 u_2 + \gamma_2) : (u_1, u_2) \in F\} \text{ e } d' = (\lambda_1 \bar{u}_1 + \gamma_1, \lambda_2 \bar{u}_2 + \gamma_2)$$

   Allora
   $$\Phi(F', d') = (\lambda_1 \Phi_1(F, d) + \gamma_1, \lambda_2 \Phi_2(F, d) + \gamma_2)$$
4. **Indipendenza dalle alternative irrilevanti**: Sia dato (F, d) e sia $G \subseteq F$, G chiuso e convesso, t.c. $\Phi(F, d) \in G$. Allora $\Phi(F, d) = \Phi(G, d)$
5. **Simmetria**: Se $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$ e se $(u_1, u_2) \in F \Leftrightarrow (u_2, u_1) \in F$, allora $\Phi_1(F, d) = \Phi_2(F, d)$

Si può allora enunciare il seguente:

Teorema 8.1 *C'è una ed una sola soluzione Φ, definita su $\mathcal{B}$, che soddisfa le condizioni 1), ..., 5). Inoltre, se (F, d) è essenziale, si ha che:*

$$\Phi(F, d) = argmax\ (u_1 - \bar{u}_1)(u_2 - \bar{u}_2)\ con\ (u_1, u_2) \in F, u_1 \geq \bar{u}_1, u_2 \geq \bar{u}_2$$

8.1 Critica del modello di contrattazione

Dunque il teorema di Nash è in grado di mettere d'accordo chiunque si trovi in una situazione come quella di sopra ed accetti le sue condizioni per un'equa spartizione.

> Il primo assioma vuol mettere in luce un criterio di efficienza: non ha senso accontentarsi di un risultato, se entrambi i giocatori possono fare meglio. Dunque, anche ammettendo che i giocatori possano distruggere utilità, questo non può accadere all equilibrio..
>
> Il terzo assioma è detto di invarianza rispetto a trasformazioni di utilità. In pratica dice che se cambiamo unità di misura all'utilità del giocatore (i fattori h e k) e aggiungiamo certe quantità iniziali (partendo dalle utilità a e b, per esempio, invece che 0 e 0), il risultato cambia tenendo conto esattamente dei fattori precedenti. Insomma non cambia, in sostanza, il risultato se lo si esprime in euro o in dollari (pur di esprimerlo sempre in euro o in dollari) e cambia delle stesse quantità se spostiamo i livelli zero di utilità.
>
> Il quarto è chiamato indipendenza dalle alternative irrilevanti: se aggiungere a C, che è l'insieme delle utilità che i giocatori si possono garantire nella contrattazione, altri elementi, che portano a costruire un insieme più grande C', porta come risultato a una situazione che già era in C, allora quest'ultima è già la soluzione per il gioco C. (Notare che il punto di disaccordo è lo stesso in entrambi i giochi). In altre parole, quello che abbiamo aggiunto a C non sono che alternative irrilevanti, appunto.
>
> Il quinto, detto assioma di simmetria, è molto chiaro: significa che in un gioco simmetrico il risultato deve essere simmetrico. Se i giocatori sono indistinguibili dal punto di vista delle loro utilità e dal punto di partenza, il risultato deve essere lo stesso per ambedue.

Il modello di contrattazione di Nash è certamente molto interessante. Non è certo esente da critiche, però. E qui non parliamo delle osservazioni che si possono fare sugli assiomi. Bensì puntiamo l'attenzione sulle assunzioni "nascoste", che non sono di poco conto e che per di più rischiano di passare inosservate.
Vediamo ora alcuni problemi che sono emersi rappresentando una critica all'approccio assiomatico di Nash:

- Come si sceglie il punto d? Non è facile fare una scelta se il gioco dato non è cooperativo. In realtà ci sono vari approcci: il max-min, un equilibrio di Nash,...
- analogamente, il "feasibility set" F è individuato con certezza? ogni F con le caratteristiche date (convesso, etc.) è un "feasibility set" per un qualche problema di contrattazione? O ve ne sono alcuni che non si posssono ottenere in questo modo?
- altre informazioni, oltre a quelle previste (e cioè (F, d)), rappresentate in termini di valori di utilità, non hanno alcun rilievo in un problema di contrattazione? Non saremmo disposti a modificare le nostre opinioni se avessimo informazioni supplementari?
- per quale motivo Φ deve essere un "singleton"? Ad esempio, un gioco strategico non ha in genere un unico equilibrio di Nash
- un'altra obiezione è più generale ed è una obiezione di fondo all'approccio assiomatico. Perchè mai determinare una soluzione su una classe di giochi quando si ha a che fare con un gioco concreto? Dietro a questa impostazione c'è l'idea di una validità normativa. Ma anche da questo punto di vista la classe dei giochi che posso aspettarmi di giocare è assimilabile all'insieme dei problemi di contrattazione su cui si ha l'assiomatizzazuione di Nash?
- In alcuni casi la soluzione dettata dal modello non è equa. Per esempio, se la spartizione della somma avviene tra due persone (I e II) la cui funzione di utilità assume i seguenti valori:

Moneta di I	Moneta di II	Utilità di I	Utilità di II	Prodotto
0	100	0.00	1.00	0.00
25	75	0.25	0.98	0.245
50	50	0.50	0.90	0.450
75	25	0.75	0.73	0.548
100	0	1.00	0.00	0.00

  la soluzione di Nash offre 75 a I e 25 a II. Cio è eticamente ingiusto. In realtà la funzione di utilità dichiarata da I è la funzione dichiarabile da un "ricco", mentre l'utilità dichiarata da II è più probabile per un "povero". C'è dunque una ingiustizia?

  Certamente sul piano etico siamo portati a pensare che sarebbe meglio dare di più al povero.

  Ma l'ingiustizia non sembra essere nel modello di contrattazione, bensì nelle funzioni di utilità che vengono dichiarate dai due.

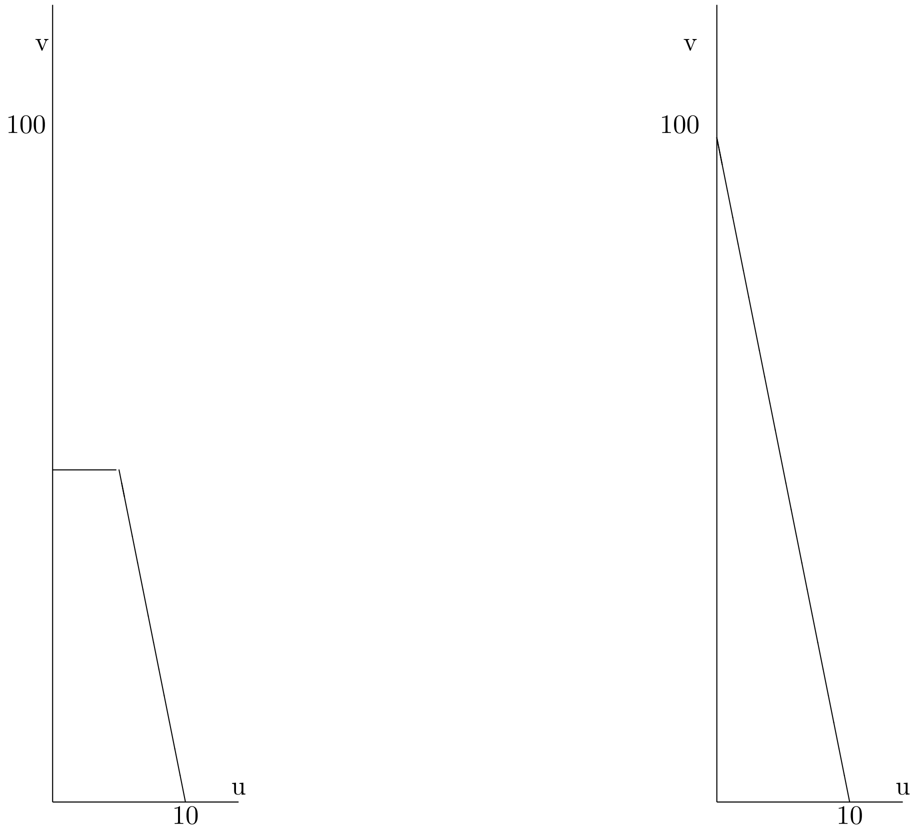


Figura 6: Gioco A e Gioco B

- le critiche più significative sono state fatte all'assioma dell'indipendenza dalle alternative irrilevanti. In effetti può non sembrare sensato che di fronte a nuove alternative la soluzione non debba mai cambiare. Nuove alternative possono cambiare la forza contrattuale di chi da queste viene privilegiato.

  Osserviamo il seguente esempio illustrato nella figura 2:

  Non sembra naturale che la soluzione dei due insiemi di contrattazione sia la stessa, in quanto le maggiori alternative presenti nel secondo modello potrebbero naturalmente privilegiare il secondo giocatore.

BIBLIOGRAFIA

Aumann, Robert J. [1976]: Agreeing to Disagree, Annals of Statistics, 4, 1236-1239.
In questo articolo compare per la prima volta la formalizzazione del concetto di conoscenza comune

Arrow, Kenneth J. e Gerard Debreu [1954]: Existence of an equilibrium for a competitive economy, Econometrica, 22, 265-290.
Esistenza dell'equilibrio economico di Walras.

Costa, Giacomo e Pier Angelo Mori [1994]: Introduzione alla teoria dei giochi, Il Mulino, Bologna.

Un testo di carattere introduttivo.

Cournot, A. Augustin [1838]: Recherches sur les principles mathematiques de la theorie des richesses, Libraire des sciences politiques et sociales, M. Rivière & C.ie, Parigi.
Rilevante perchè contiene il famoso studio sull'oligopolio, con l'idea precorritrice dell'equilibrio di Nash

Fishburn, Peter C. [1970]: Utility Theory for Decision Making, Wiley, New York; ristampa con correzioni: Krieger, Huntington (NY), 1979.
Un ottimo riferimento per la teoria dell'utilità

Fudenberg, Drew e Jean Tirole [1991]: Game Theory, MIT Press, Cambridge (Massachusetts).
Recente libro di grande successo

Harsanyi, John C. [1968]: Games with incomplete information played by Bayesian players, Parts I, II and III, Management Science, 14, 159-182, 320-334, 486-502.
I famosi tre articoli in cui Harsanyi dà un nuovo impulso alla TdG, permettendole di affrontare giochi nei quali i dati possono non essere conoscenza comune tra i giocatori

Lucchetti R. [2001]: Di duelli, scacchi e dilemmi. Paravia Bruno Mondadori Editori, Milano
Semplice e accessibile, ma anche rigoroso dove necessario

Luce, R. Duncan e Howard Raiffa [1957]: Games and Decisions, Wiley, New York.
Un classico che riesce ancora ad essere attuale

Myerson, Roger B. [1991]: Game Theory: Analysis of Conflict, Harvard University Press, Cambridge (MA).

Libro recente, molto ben scritto e preciso

Nash, John F. Jr. [1950]: Equilibrium Points in n-Person Games, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 36, 48-49.

Nash, John F. Jr. [1950]: The Bargaining Problem, Econometrica, 18, 155-162.

Nash, John F. Jr. [1951]: Non-Cooperative Games, Ann. of Math., 54, 286-295.

Nash, John F. Jr. [1953]: Two-Person Cooperative Games, Econometrica, 21, 128-140

Owen, Guillermo [1995]: Game Theory, Academic Press, New York.
Un classico un po' datato: resta tuttavia un punto di riferimento per i giochi cooperativi. Prima edizione 1968, seconda 1982

Smith, John Maynard [1982]: Evolution and the Theory of Games, Cambridge University Press, Cambridge (MA).
Gli ESS (evolutionary stable strategies): ovvero, la TdG trova nuovi sbocchi

von Neumann, John [1928]: Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, Matematische Annalen, 100, 295-320; traduzione inglese: On the Theory of Games of Strategy, in Contributions to the Theory of Games, n. IV, 13-42, 1959; vedi anche Collected Works, vol. VI.
Esistenza di un punto di sella in strategie miste per (l'estensione mista di) un gioco finito a somma zero

von Neumann, John e Oskar Morgenstern [1944]: Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press, Princeton; seconda edizione (con in appendice la derivazione assiomatica dell'utilità attesa): 1947; terza edizione: 1953.

Testo che segna la nascita della la teoria dei giochi

Zermelo, E. [1913]: Ueber eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiel, Proceedings Fifth International Congress of Mathematicians, vol. 2, 501-504.
Articolo in cui si dimostra che il gioco degli scacchi ha un equilibrio in strategie pure.